Marko Slapar

Zapiski predavanj iz Osnov Matematične Analize

Ljubljana, Junij 2012

Naslov: Zapiski predavanj iz osnov matematične analize
Avtor: Marko Slapar
1. izdaja
Dostopno na spletnem naslovu `hrast.pef.uni-lj.si/~slaparma`

CIP - Katatološki zapis o publikaciji
Narodna in univerzitetna knjižnica, Ljubljana

517.5(0.034.2)

SLAPAR, Marko

Zapiski predavanj iz osnov matematične analize [Elektronski vir] /
Marko Slapar. - 1. izd. - El. knjiga. - Ljubljana : samozal., 2012

Način dostopa (URL):`http://hrast.pef.uni-lj.si/~slaparma/OMA.pdf`

ISBN 978-961-276-479-1 (pdf)

262520832

Kazalo

POGLAVJE 1

Števila

1.1. Naravna števila $\mathbb{N}$

Z naravnimi števili štejemo. Množico naravnih števil označimo z

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}.$$

Množica naravnih števil je *zaprta* za algebraični operaciji seštevanje $(+)$ in množenje $(\cdot)$. To pomeni, da poljubni dve naravni števili $a, b \in \mathbb{N}$ lahko seštejemo in zmnožimo, in bosta oba rezultata, $a + b$ ter ab, naravni števili. Operaciji odštevanje in deljenje lahko le deloma izvajamo znotraj naravnih števil, saj v tem primeru rezultata nista nujno naravni števili. Naravna števila lahko tudi *linearno uredimo* po velikosti: $1 < 2 < 3 < \cdots$.

Peanovi aksiomi in princip matematične indukcije. V matematiko lahko naravna števila formalno vpeljemo s pomočjo Peanovih aksiomov, imenovanih po italijanskem matematiku Giuseppeju Peanu (1858-1932). Ti aksiomi so

- P1. 1 je naravno število
- P2. Vsako naravno število n ima naslednika n^+, ki je tudi naravno število.
- P3. Naravno število 1 ni naslednik nobenega naravnega števila.
- P4. Če je $n^+ = m^+$ je $n = m$.
- P5. (Aksiom o matematični indukciji) Vsaka podmnožica naravnih števil, ki vsebuje število 1 in z vsakim številom n vsebuje tudi naslednika n^+, vsebuje vsa naravna števila.

Aksiom P1 (v povezavi s P2 in P3) nam vpelje število 1 kot prvo naravno število. Nekateri avtorji namesto števila 1 raje pišejo število 0, in tako štejejo tudi število 0 med naravna števila. Kot bomo videli, je vsebinsko najpomembnejši aksiom P5, ki nam tudi praktično olajša dokazovanje marsikatere trditve o naravnih številih. Preden si to podrobneje ogledamo, poglejmo, kako iz aksiomov formalno definiramo operaciji seštevanje in množenje.
Seštevanje. Seštevanje v množico naravnih števil lahko vpeljemo rekurzivno: $a + 1 = a^+$ in $a + b^+ = (a + b) + 1$. S tem lahko tudi formalno vpeljemo običajne simbole za naravna števila. $2 = 1 + 1$, $3 = 2 + 1$, $4 = 3 + 1$,. . ..
Množenje. Prav tako lahko rekurzivno vpeljemo množenje: $a \cdot 1 = a$ in $a \cdot b^+ = (a \cdot b) + a$.

Aksiom matematične indukcije nam omogoča način, kako lahko veljavnost neke izjave preverimo za vsa naravna števila. Poglejmo si nekaj primerov.

Primer 1.1.1. Pokažimo, da za vsako naravno število n velja enakost

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Označimo z $A \subset \mathbb{N}$ podmnožico naravnih števil, za katera zgornja formula velja. Preverimo najprej, da je $1 \in A$, oziroma, da za naravno število 1 zgornja formula velja. Ta korak imenujemo *baza indukcije*.

<u>Baza indukcije.</u> $1^2 = \frac{1(1+1)(2\cdot 1+1)}{6} = 1$, torej $1 \in A$.

Pokažimo sedaj, da iz *indukcijske predpostavke*, da za naravno število n zgornja formula velja, sledi, da formula velja tudi za število $n+1$. Povedano drugače, če je $n \in A$, je tudi $n+1 \in A$. Temu koraku rečemo *indukcijski korak*.

<u>Indukcijski korak.</u>

$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ &\Rightarrow 1^2 + 2^2 + \cdots + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}: \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 + (n+1)^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6} \\ &= \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}. \end{aligned}$$

S tem smo pokazali, da je tudi $n+1 \in A$. Oba koraka skupaj nam s pomočjo aksioma P5 povesta, da je $A = \mathbb{N}$ in s tem formula velja za vsa naravna števila.

Primer 1.1.2. Pokažimo, da za vsako naravno število n velja

$$4 | 3^{2n-1} + 1.$$

Naj bo zopet $A \subset \mathbb{N}$ podmnožica naravnih števil, za katera trditev velja.

<u>Baza indukcije.</u> Za $n = 1$ velja $4|3^{2\cdot 1-1} + 1$ oz. $4|4$. Torej $1 \in A$.

<u>Indukcijski korak.</u> $4|3^{2n-1} + 1 \Rightarrow 4|3^{2(n+1)-1} + 1$: Lahko pišemo

$$3^{2(n+1)-1} + 1 = 3^{2n+1} + 1 = 9 \cdot 3^{2n-1} + 1 = 9(3^{2n-1} + 1) - 8.$$

Ker po indukcijski predpostavki $4|3^{2n-1} + 1$ in ker $4|8$, $4|9(3^{2n-1} + 1) - 8$. Torej velja, da če je $n \in A$, je tudi $n+1 \in A$. S pomočjo aksioma o matematični indukciji je $A = \mathbb{N}$ in s tem trditev dokazana.

Aksiom matematične indukcije 'olajša' dokazovanje trditev o naravnih številih, saj pri dokazovanju trditve za splošno naravno število n lahko dodatno predpostavimo, da trditev že velja za vsa predhodna naravna števila.

1.2. Cela števila $\mathbb{Z}$

Cela števila $\mathbb{Z}$ so razširitev naravnih števil z negativnimi naravnimi števili in številom 0. Torej

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}.$$

Cela števila so zaprta za seštevanje in množenje, in ker ima vsako celo število $a \in \mathbb{Z}$ tudi svoj obratni element $-a \in \mathbb{Z}$, je množica celih števil zaprta tudi za odštevanje. Še vedno pa ne moremo nujno deliti dve števili (npr. $5/3 \notin \mathbb{Z}$).

1.3. Racionalna števila $\mathbb{Q}$

Racionalna števila so tista števila, ki jih lahko predstavimo kot kvocient dveh celih števil, torej kot ulomek $\frac{a}{b}$, pri čemer $b \neq 0$. Kot vemo, dva ulomka $\frac{a}{b}$ in $\frac{c}{d}$ predstavljata isto racionalno število, če je $ad = bc$. Racionalna števila so zato formalno definirana kot kvocientna množica

$$\{(a, b);\ a, b \in \mathbb{Z},\ b \neq 0\}/\sim, \quad (a, b) \sim (c, d) \text{ če } ad = bc.$$

Ulomki so torej skoraj sinonim za racionalna števila, razlika je v tem, da sta, na primer, $\frac{1}{2}$ in $\frac{2}{4}$ različna ulomka, predstavljata pa isto racionalno število.

V množici racionalnih števil lahko seštevamo

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$$

in množimo

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd},$$

odštevanje in deljenje pa razumemo kot seštevanje z obratnim številom $-\frac{c}{d}$ oziroma množenje z inverznim številom $\frac{d}{c}$. Seveda z 0 ne smemo deliti. Racionalna števila so zaprta za vse te operacije.

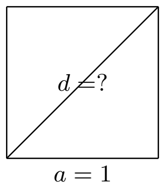
1.4. Realna števila $\mathbb{R}$

Racionalna števila povsem zadoščajo, če želimo v naši številski množici uporabljati osnovne računske operacije: seštevanje, odštevanje, množenje in deljenje. Iz naslednje preproste geometrijske naloge lahko vidimo, da množici racionalnih števil vseeno nekaj manjka: Kolikšna je dolžina diagonale kvadrata s stranico 1?

Po Pitagorovem izreki je $d^2 = 2$. Recimo, da je $d = a/b$, kjer sta a, b celi števili, in je ulomek okrajšan (največji skupni delitelj a in b je 1). Torej je $a^2/b^2 = 2$ in zato

$$a^2 = 2b^2.$$

Ker 2 deli desno stran, mora tudi levo, in ker je 2 praštevilo, mora 2 deliti a. Zato 4 deli levo stran, in po krajšanju ugotovimo, da mora 2 deliti tudi b. Ker smo predpostavili, da je ulomek okrajšan, smo tako dobili protislovje. S tem smo pokazali, da kvadrat nobenega racionalnega števila ne mora biti enak 2. Diagonala kvadrata s stranico 1 nedvomno



Slika 1.1. Diagonala kvadrata s stranico 1.

obstaja, saj jo lahko skonstruiramo, in ker mora imeti neko dolžino, opazimo, da nam racionalna števila ne zadoščajo povsem. Podobena ugotovitev velja tudi pri obsegu kroga s premerom 1, kjer se zopet izkaže, da le ta ni racionalno število. Vendar pa je dokaz, da π ni racionalno število precej težji.

Aksiomi realnih števil. Podobno kot pri naravnih številih, bomo tudi tu zapisali aksiome (osnovne lastnosti), ki jih pričakujemo od realnih števil. Zaenkrat naj poudarimo, da realnih števil še nismo skonstruirali, tako da strogo gledano še ne vemo, da le ta obstajajo. Konstrukcijo realnih števil bomo nakazali malo kasneje.

(i) Lastnosti seštevanja
- A1 Komutativnost: $a + b = b + a$
- A2 Asociativnost: $(a + b) + c = a + (b + c)$
- A3 Nevtralni element za seštevanje: obstaja število 0, da velja $a + 0 = a$ za vsako število a
- A4 Obratni element za seštevanje: za vsako realno število a obstaja število $-a$, da velja $a + (-a) = 0$

(ii) Lastnosti množenja
- A5 Komutativnost: $a \cdot b = b \cdot a$
- A6 Asociativnost: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
- A7 Obstaja enota za množenje: obstaja število 1, da velja $a \cdot 1 = a$ za vsako število a
- A8 Inverzni element za množenje: za vsako realno število $a \neq 0$ obstaja število a^{-1}, da velja $a \cdot a^{-1} = 1$

(iii) Lastnosti, ki povezujeta seštevanje in množenje
- A9 $0 \neq 1$
- A10 Distributivnost: $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$

Opomba. Če v neki množici za seštevanje veljajo aksiomi $A1$ do $A4$ rečemo, da je ta množica *komutativna grupa* za seštevanje. Če veljajo še aksiomi $A5$, $A6$, $A7$, $A9$ in $A10$, rečemo, da je množica za operaciji seštevanje in množenje *komutativni kolobar z enoto.* Taka množica so npr. cela števila. Če veljajo vsi zgornji aksiomi, torej tudi $A8$, pa pravimo, da gre za *komutativen obseg* ali *polje*. Hitro lahko opazimo, da zgornji aksiomi veljajo npr. za racionalna števila, torej so tudi racionalna števila (ne le realna števila) komutativnen obseg.

Naša predstava o realnih številih je več kot samo o predstava o množici, v kateri lahko dobro seštevamo in množimo. Realna števila si predstavljamo linearno urejena.

(iv) Aksiomi urejenosti

A11 Antisimetričnost: če $a \leq b$ in $b \leq a$ je $a = b$

A12 Tranzitivnost: če je $a \leq b$ in $b \leq c$ je $a \leq c$

A13 Stroga sovisnost: za vsaki števili a, b velja $a \leq b$ ali $b \leq a$

(v) Povezava med urejenostjo in operacijama $+, \cdot$

A14 Če je $a \leq b$ je $a + c \leq b + c$ za vsako število c

A15 Če je $a \leq b$ in $0 \leq c$ je $a \cdot c \leq b \cdot c$

Opomba. Če v komutativnem obsegu obstaja relacija urejenost, ki zadošča aksiomom $A11$ do $A15$, rečemo, da je ta komutativen obseg linearno urejen (števila si lahko predstavljamo urejena v vrsto). Z vsemi dosedanjimi aksiomi smo povedali, da želimo, da so realna števila linearno urejen komutativen obseg. Hitro lahko preverimo, da vse te lastnosti veljajo za racionalna števila z običajno urejenostjo $\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d}$ če $ad \leq cd$. Zgornji aksiomi torej v ničemer še ne ločijo realnih števil od racionalnih števil.

Poleg relacije $\leq$ seveda pogosto uporabljamo tudi relacije $\geq$, $<$ in $>$. Definicij ne bomo pisali, ker so očitne. Realna števila tudi ločimo na *pozitivna* (strogo večja od 0), in *negativna* (strogo manjša od nič).

Preden končamo zgodbo o aksiomih realnih števil še z zadnjim, Dedekindovim aksiomom, si poglejmo, kako lahko aksiome uporabimo za izpeljavo nekaterih trditev, ki veljajo v realnih (in seveda tudi racionalnih) številih.

Izrek 1.4.1. *Vsako realno število a ima eno samo nasprotno število.*

Dokaz. Recimo, da ima a dve nasprotni števili b, c. Velja $a + b = 0$ in $a + c = 0$. Iz A4 sledi $c + (a + b) = c + 0 = c$, po drugi strani pa lahko uporabimo $A3$ in $A2$ in velja $c + (a + b) = (c + a) + b = (a + c) + b = 0 + b = b + 0 = b$. Zato je $c = b$. □

Izrek 1.4.2. *Pravilo krajšanja: če je $a + x = a + y$ je $x = y$.*

Dokaz. $a+x = a+y \Rightarrow -a+(a+x) = -a+(a+y) \Rightarrow (-a+a)+x = (-a+a)+y \Rightarrow 0 + x = 0 + y \Rightarrow x + 0 = y + 0 \Rightarrow x = y$ □

Posledica 1.4.3. $-0 = 0$

Dokaz. Iz $A4$ velja $0 + (-0) = 0$ in iz $A3$ $0 + 0 = 0$. Iz prejšnje trditve sledi $-0 = 0$. □

V zgornji shemi aksiomov nam manjka še zadnji aksiom, ki bo ključen pri konstrukciji realnih števil in ki bo množici realnih števil dal tisto lastnost, ki jo racionalna pogrešajo: če si racionalna števila predstavljamo kot točke na premici, je le-ta polna lukenj.

Definicija 1.4.4. Množica števil A je navzgor omejena, če obstaja tako število a, da je $x \leq a$ za vsak $x \in A$. Vsakemu številu a s tako lastnostjo rečemo *zgornja meja* množice A. Če je a zgornja meja množice A in nobeno število $b < 0$ ni zgornja meja množice A, rečemo, da je a *supremum* ali *natančna zgornja meja* množice A in označimo $a = \sup A$.

Na povsem analogen način povemo, kdaj je neka množica A *navzdol omejena*, definiramo pojem *spodnja meja* in *natančna spodnja meja* ali *infimum* ($\inf A$). Če je množica tako navzgor kot tudi navzdol omejena, rečemo, da je omejena.

Primer 1.4.5. Ilustrirajmo si zgornje pojme na nekaj zgledih.

- Množica $A = (1, \infty)$ je navzdol omejena, ni navzgor omejena. Spodnja meja je vsako število, $a \leq 1$, $\inf A = 1$.
- Množica $A = [1, 3)$ je omejena, $\inf A = 1$, $\sup A = 3$. Ker je $1 \in A$ lahko rečemo, da ima A minimum, ker pa $3 \notin A$, A nima maksimuma.
- Množica $A = \{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{4}{5}, \frac{1}{6}, \ldots\}$ je navzgor in navzdol omejena. Natančna spodnja meja je 0, natančna zgornja meja pa 1.

Pomembno vprašanje za nadaljevanje zgodbe o realnih številih je naslednje: Ali ima vsaka navzgor omejena množica tudi natančno zgornjo mejo? Naslednji primer nam pokaže, da znotraj sveta, kjer bi imeli samo racionalna števila, to ne bi držalo.

Primer 1.4.6. Naj bo množica $A = \{x \in \mathbb{Q};\ x^2 \leq 2\}$. Seveda je množica A navzgor omejena, saj je na primer 2 zgornja meja množice A. Lahko pa vidimo, da nobeno racionalno število ni natančna zgornja meja množice A, ker $\sqrt{2}$ ni racionalno število. Množica A je torej navzgor omejena množica racionalnih števil, za katero pa ne moremo najti racionalne natančne zgornje meje.

A16 *Dedekindov aksiom*: vsaka neprazna navzgor omejena množica realnih števil ima natančno zgornjo mejo.

Opomba. Iz Dedekindovega aksioma seveda sledi, da ima tudi vsaka navzdol omejena neprazna množica realnih števil natančno spodnjo mejo.

Naj samo omenimo, da sistem aksiomov $A1 - A16$ natanko določa realna števila, torej vsak linearno urejen obseg, ki zadošča tudi Dedekindovemu aksiomu, je urejenostno izomorfen polju realnih števil. Bolj za ilustracijo si poglejmo nekaj posledic Dedekindovega aksioma.

Posledica 1.4.7. *Množica naravnih števil ni navzgor omejena.*

Dokaz. Recimo, da bi bila množica naravnih števil navzgor omejena. Potem bi po Dedekindovem aksiomu obstajalo tako realno število a, da bi bil a natančna zgornja meja množice $\mathbb{N}$. Iz definicije natančne zgornje meje sledi, da $a-1$ ni več zgornja meja za $\mathbb{N}$, kar pomeni, da obstaja tako naravno število $n \in \mathbb{N}$, da velja $n > a-1$. Zato je po aksiomu $A14$ $n+1 > a$. Ker je $n+1$ tudi naravno število, smo prišli v protislovje, saj naj bi bil a zgornja meja za $\mathbb{N}$. □

Posledica 1.4.8 (Arhimedska lastnost realnih števil). *Za vsaki dve pozitivni realni števili a, b obstaja tako naravno število n, da velja $na > b$.*

Dokaz. Ker množica $\mathbb{N}$ ni navzgor omejena, b/a ni zgornja meja za $\mathbb{N}$ in obstaja naravno število n, da je $n > b/a$ in zato po $A15$ $na > b$. □

Posledica 1.4.9. *Naj bo $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Potem obstaja $n \in N$, da je $1/n < \varepsilon$.*

Dokaz. Obstaja $n \in \mathbb{N}$, da je $n > 1/\varepsilon$. □

Konstrukcija realnih števil. V tem kratkem razdelku bomo nakazali, kako lahko skonstruiramo množico realnih števil. Da v tej množici zares držijo aksiomi od A1-A16, ne bomo dokazovali.

Definicija 1.4.10. Dedekindov rez je neprazna podmnožica $A \subset \mathbb{Q}$, $A \neq \mathbb{Q}$, racionalnih števil, za katero veljata lastnosti

(i) če je $a \in A$ in je $x < a$, je tudi $x \in A$,
(ii) če je $a \in A$, obstaja tak $y \in A$, da je $y > a$.

Definicija 1.4.11. Množica realnih števil je množica vseh Dedekindovih rezov.

Primer 1.4.12. Množica $\{x \in Q; x^2 < 2\} \cup \{x \in \mathbb{Q}; x < 0\}$ je primer reza, ki nam predstavlja število $\sqrt{2}$.

Za dva reza A in B rečemo, da velja $A \leq B$ če je $A \subset B$. Vsoto dveh rezov definiramo kot $A + B = \{a + b;\ a \in A, b \in B\}$. Ničelni rez je $\underline{0} = \{x \in \mathbb{Q};\ x < 0\}$, obratni element reza A je $-A = \{x;\ \text{obstaja } r > 0, \text{ da } -x - r \notin A\}$. Malo bolj zoprno je definirati produkt in inverz za množenje (razmisli). Z malo truda lahko dokažemo, da za tako definirani operaciji $+$ in $\cdot$ ter urejenost $\leq$ na množici rezov, veljajo aksiomi $A1 - A16$. Dedekindov aksiom ni težko preveriti. Naj bo $\mathcal{A}$ navzgor omejena množica rezov. To pomeni, da obstaja tak rez B, da je $A \subset B$ za vsak $A \in \mathcal{A}$. Unija $\cup_{A \in \mathcal{A}} A$ je supremum množice $\mathcal{A}$.

Izrek 1.4.13. *Množica racionalnih števil $\mathbb{Q}$ je na naraven način podmnožica realnih števil $\mathbb{R}$ in za vsaki dve realni števili $A < B$ obstaja racionalno število R, da velja $A < R < B$.*

Dokaz. Naj bo $r \in \mathbb{Q}$. Rez, ki pripada številu r definiramo kot $R = \{x \in \mathbb{Q};\ x < r\}$. Tako racionalna števila lahko vidimo kot podmnožico množice rezov, torej kot podmnožico realnih števil. Če velja $A < B$ za dva reza, potem obstaja tak $x \in B$, da $x \notin A$. Lastnost (ii). za reze nam pove, da obstaja nek $r > x$, da je $r \in B$. Ker so vsi elementi rezov racionalna števila, je tako tudi število r. Za rez R, ki pripada racionalnemu številu r, velja $A < R < B$. □

Opomba. Zgornja trditev nam pove, da so racionalna števila *povsod gosta* v realnih številih.

Definicija 1.4.14. Realna števila, ki niso racionalna, imenujemo iracionalna

Definicija 1.4.15. Če za realno število a obstaja tak polinom $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$, katerega koeficienti $a_0, a_1, \ldots, a_n$ so racionalna števila, da je $p(a) = 0$, rečemo, da je a algebraično število. Števila, ki niso algebraična imenujemo transcendentna.

Kasneje bomo videli, da je velika večina realnih števil iracionalnih in med temi jih je večina transcendentnih. Primer transcendentnega števila sta števili π in e.

Decimalni zapis realnega števila. Vsako realno število lahko predstavimo z decimalnim zapisom. Naj bo $a \in \mathbb{R}$ in naj velja $a \geq 0$. Izberimo $a_0 \in \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ tako, da je $a_0 \leq a$ in $a_0 + 1 > a$ (tako ptevilo a_0 obstaja, ker je množica naravnih števil navzgor neomejena). Število $a_1 \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ izberemo tako, da je $a_0 + \frac{a_1}{10} \leq a < a_0 + \frac{a_1+1}{10}$. Postopek nadaljujemo induktivno: če imamo že izbrana števila $a_0, a_1 \ldots, a_n$ izberemo $a_{n+1} \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ tako, da je

$$\begin{aligned} &a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} + \frac{a_{n+1}}{10^{n+1}} \\ &\leq a < a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} + \frac{a_{n+1}+1}{10^{n+1}}. \end{aligned}$$

Izrek 1.4.16. *Pri tako izbranih številih* $a_0, a_1, \ldots$ *velja*

$$a = \sup\left\{a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_n}{10^n};\ n = 0, 1, 2, \ldots\right\}.$$

Dokaz. Iz definicije števil $a_0, a_1, \ldots$ sledi, da je a zgornja meja za množico. Naj bo $b < a$. Naj bo n zadosti velik, da je $\frac{1}{10^n} < (a - b)$. Hitro se lahko prepričamo, da velja $b < a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_n}{10^n}$, zato b ni več zgornja meja. Ker to velja za vsak b manjši od a, je a supremum. □

Vsakemu številu torej lahko z zgornjim postopkom na enoličen način določimo števila $a_0, a_1, \ldots$ in zgornji izrek nam omogoči, da smiselno razumemo zapis $a = a_0, a_1 a_2 a_3 \ldots$ Takemu zapisu rečemo *decimalni zapis* števila a. V kolikor je a negativno število, vzamemo za decimalni zapis števila a zapis $-a_0, a_1 a_2 a_3 \ldots$, kjer je $-a = a_0, a_1 a_2 a_3 \ldots$

Opomba. Števila $a_0, a_1, a_2, \ldots$ v decimalnem zapisu realnih števil niso povsem poljubna. Pogoj, ki mora veljati, je, da niso od nekega n dalje vsa števila $a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots$

enaka 9. Na primer $0,999999999\ldots$ ni decimalni zapis nobenega realnega števila. Pravilni decimalni zapis števila 1 je $1,00000\ldots$ Seveda je navada, da v kolikor so v decimalnem zapisu od nekje naprej same ničle, le teh ne pišemo.

Absolutna vrednost. Absolutna vrednost realnega števila x je definirana kot

$$|x| = \begin{cases} x; & x \geq 0 \\ -x; & x < 0 \end{cases}$$

Geometrijsko nam absolutna vrednost števila x pove, koliko je to število na realni premici oddaljeno od števila 0. Izraz $|x-y|$ pa nam poda razdaljo med številoma x in y na realni premici. Dokaz naslednje trditve enostavno sledi iz definicije in geometrijske interpretacije absolutne vrednosti.

IZREK 1.4.17. *Naj bosta x in y poljubni realni števili. Potem velja*

(i) $|xy| = |x||y|$
(ii) $|x+y| \leq |x| + |y|$
(iii) $|x-y| \geq ||x| - |y||$

Definicija potence. Če je x neko realno število in n naravno število, definiramo

$$x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot x \cdots x}_{\text{n}-krat}.$$

Korene, oziroma potence $x^{1/n}$, definiramo s pomočjo naslednje trditve.

IZREK 1.4.18. *Naj bo $x \geq 0$ in n naravno število. Potem obstaja natanko eno pozitivno število $y \in \mathbb{R}$, da velja $y^n = x$. Tako število y imenujemo n-ti koren števila x in označimo z $\sqrt[n]{x}$ oziroma $x^{1/n}$.*

DOKAZ. Označimo z A množico $A = \{s \in \mathbb{Q}; s \geq 0, s^n \leq x\}$. Množica A ni prazna, saj je $0 \in A$ in je tudi navzgor omejena, saj je pri $x \leq 1$ za vsak $s \in A$ očitno velja $s \leq 1$, pri $x \geq 1$ pa za vsak $s \in A$ očitno velja $s \leq x$. Poglejmo, da za $y = \sup A$ velja $y^n = x$. Če je $y^n < x$, naj bo y_1 poljubno racionalno število med y in $y + \varepsilon$ za nek majhen $\varepsilon < y$. Velja

$$(y+\varepsilon)^n = y^n + ny^{n-1}\varepsilon + \frac{n(n-1)}{2}y^{n-2}\varepsilon^2 + \cdots + \varepsilon^n < y^n + n^{n+1}y^{n-1}\varepsilon.$$

Če torej izberemo $\varepsilon < \frac{x-y^n}{n^{n+1}y^{n-1}}$ bo $(y+\varepsilon)^n < x$ in zato tudi $y_1^n < x$. Tako y ne more biti supremum množice A. Podobno lahko preverimo, da y^n ne more biti večji od x. Zato mora veljati $y^n = x$ □

Sedaj lahko definiramo potence s pozitivnimi racionalnimi eksponenti kot

$$x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$$

in razširimo definicijo še na negativne racionalne eksponente z

$$x^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{x^{\frac{m}{n}}}.$$

Za potence x^a, kjer je $x \geq 1$ in a poljubno pozitivno realno število, definiramo

$$x^a = \sup\{x^s;\ s \in \mathbb{Q}, 0 \leq s \leq a\},$$

in za negativne realne a kot $x^a = \frac{1}{x^{-a}}$. Če je $0 \leq x < 1$ in a poljubno pozitivno realno število definiramo $x^a = (1/x)^{-a}$. Za tako definirane potence bi z malo truda lahko dokazali pravila za računanje:

$$(xy)^a = x^a y^a,\ x^a x^b = x^{a+b} \text{ in } (x^a)^b = x^{ab}.$$

1.5. Kompleksna števila $\mathbb{C}$

Kompleksna števila definiramo kot pare (a, b) dveh realnih števil, za katera definiramo seštevanje in množenje kot

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d), \qquad (a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc).$$

Bolj običajno se odločimo za ekvivalenten zapis $a + \mathrm{i}b$, kjer definiramo $\mathrm{i}^2 = -1$. S tem dogovorom seštevamo

$$(a + \mathrm{i}b) + (c + \mathrm{i}d) = (a + c) + \mathrm{i}(b + d)$$

in množimo

$$(a + \mathrm{i}b)(c + \mathrm{i}d) = (ab - bd) + \mathrm{i}(ad + bc).$$

Nevtralni element za seštevanje je seveda število $0 = 0{+}0\mathrm{i}$ in enota za množenje $1 = 1{+}0\mathrm{i}$. Nasprotni element element številu $a{+}ib$ je $-a{-}\mathrm{i}b$, in če je $a{+}\mathrm{i}b \neq 0$, ima število inverzni element za množenje

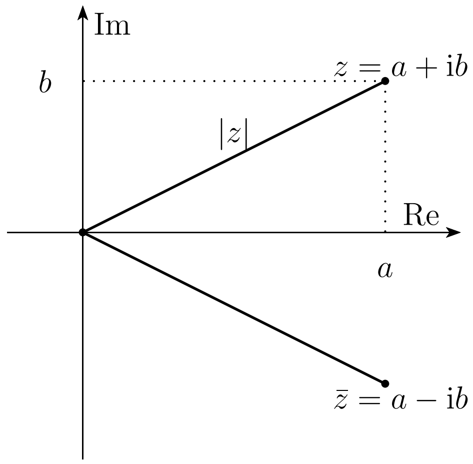
$$\frac{1}{a + \mathrm{i}b} = \frac{a - \mathrm{i}b}{a^2 + b^2}.$$

Lahko preverimo, da pri tako definiranih operacijah kompleksna števila zadoščajo aksiomom $A1 - A10$, ki smo jih našteli pri realnih številih. Zato so kompleksna števila polje.

Kompleksna števila se v literaturi prvič pojavijo v drugi polovici 16. stoletja. Medtem ko je razlog za uvedbo realnih števil v 'napolnitvi lukenj' v racionalnih številih, je razlog za uvedbo kompleksnih števil bolj algebraične narave.

Izrek 1.5.1 (Osnovni izrek algebre). *Vsak nekonstanten polinom ima vsaj eno kompleksno ničlo.*

Poglejmo si nekaj definicij. Naj bo $z = a{+}\mathrm{i}b$ kompleksno število. Število a imenujemo *realni del* kompleksnega števila z in ga označimo z $\operatorname{Re} z$, število b pa *imaginarni del* kompleksnega števila z, in ga označimo z $\operatorname{Im} z$. *Absolutna vrednost* števila $z = a + \mathrm{i}b$ je število $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, in predstavlja razdalja števila $z = a + \mathrm{i}b$ do izhodišča kompleksne ravnine. *Konjugirano število* kompleksnemu številu $z = a + \mathrm{i}b$ je število $\bar{z} = a - \mathrm{i}b$, in je zrcalna slika števila z glede na x-os v kompleksni ravnini. Naslednja trditev povsem sledi iz definicij.



SLIKA 1.2. Realni in imaginarni del, absolutna vrednost in konjugirano število

IZREK 1.5.2. *Naj bosta z in w kompleksni števili. Velja*

(i) $\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$,
(ii) $\overline{zw} = \bar{z}\bar{w}$,
(iii) $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$
(iv) $\text{Re } z = \frac{z+\bar{z}}{2}$, $\text{Im } z = \frac{z-\bar{z}}{2\mathrm{i}}$.

Absolutna vrednost ima naslednje lastnosti.

IZREK 1.5.3. *Naj bosta z in w kompleksni števili. Potem velja*

(i) $|z| \geq 0$
(ii) $|z| = 0$ *natanko tedaj, ko je* $z = 0$,
(iii) $|\bar{z}| = |z|$,
(iv) $|zw| = |z||w|$,
(v) $|\text{Re } z| \leq |z|$ *in* $|\text{Im } z| \leq |z|$,
(vi) $|z + w| \leq |z| + |w|$.

DOKAZ. Točke (i)-(iii) preprosto sledijo iz definicij. Oglejmo si (iv). Naj bosta $z = a + \mathrm{i}b$ in $w = c + \mathrm{i}d$. Potem je $zw = (ac - bd) + \mathrm{i}(ad + bc)$. Torej je

$$\begin{aligned} |zw|^2 &= (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2 = a^2c^2 + b^2d^2 + a^2d^2 + b^2c^2 \\ &= (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = |z|^2|w|^2. \end{aligned}$$

Točka (v) pomeni $a^2 \leq a^2 + b^2$ in $b^2 \leq a^2 + b^2$, kar je očitno. Ostane nam torej samo se trikotniška neenakost (vi):

$$|z + w|^2 = (a + c)^2 + (b + d)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2ac + 2bd,$$

in

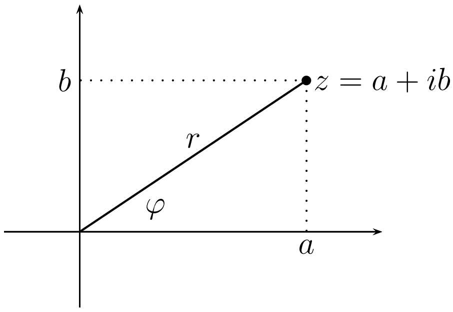
$$(|z|+|w|)^2 = a^2+b^2+c^2+d^2+2\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2}.$$

Neenakost bo torej dokazana, če pokažemo $ac+bd \leq \sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2}$. Če neenačbo kvadriramo, dobimo neenakost

$$a^2c^2+b^2d^2+2abcd \leq a^2c^2+b^2d^2+b^2c^2+a^2d^2,$$

oziroma $b^2c^2+a^2d^2 \geq 2abcd$, kar pomeni $(bc-ad)^2 \geq 0$. □

Polarni zapis kompleksnega števila. Kompleksno število $z = a+ib$ lahko zapišemo tudi s pomočjo kota φ, ki ga daljica med izhodiščem in točko z oklepa s pozitivno x osjo, in razdaljo r točke z do izhodišča.



Slika 1.3. Polarni zapis kompleksnega števila

Kot φ običajno vzamemo na intervalu $[0,2\pi)$ in ga imenujemo *argument* števila z in označimo z $\arg z$. Med običajnimi kartezičnimi koordinatami in polarnimi koordinatami števila z veljajo zveze

$$a = r\cos\varphi, \qquad b = r\sin\varphi$$

in

$$r = |z| = \sqrt{a^2+b^2}, \qquad \tan\varphi = \frac{b}{a}.$$

Kot polarni zapis števila $z = a+\mathrm{i}b$ razumemo zapis

$$z = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi).$$

Primer 1.5.4. Zapišimo naslednja kompleksna števila s polarnim zapisom: -3, $1+i$, $-1+\sqrt{3}\mathrm{i}$. Število -3 ima argument π in je oddaljeno 3 od izhodišča. Zato je

$$-3 = 3(\cos\pi + \mathrm{i}\sin\pi).$$

Število $1+i$ ima argument $\pi/4$ in $|1+i| = \sqrt{2}$, zato je

$$1+i = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\pi 4).$$

Število $-1+\sqrt{3}\mathrm{i}$ ima argument $2\pi/3$ in $|-1+\sqrt{3}|| = 2$ in zato

$$-1+\sqrt{3}\mathrm{i} = 2(\cos\frac{2\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{3}).$$

Polarni zapis je zelo primeren za množenje. Naj bosta $z = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$ in $w = \rho(\cos\vartheta + \mathrm{i}\sin\vartheta)$. Potem je

$$\begin{aligned} zw &= r\rho(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)(\cos\vartheta + \mathrm{i}\sin\vartheta) \\ &= r\rho(\cos\varphi\cos\vartheta - \sin\varphi\sin\vartheta + (\cos\varphi\sin\vartheta + \sin\varphi\cos\vartheta)) \\ &= r\rho(\cos(\varphi+\vartheta) + \mathrm{i}\sin(\varphi+\vartheta)). \end{aligned}$$

Zgornji račun nam pove, da je $|zw| = |z||w|$ in tudi $\arg zw = \arg z + \arg w$. Formulo lahko uporabimo tudi pri potencah števil. Če je $z = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$, je

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + \mathrm{i}\sin n\varphi).$$

V posebnem primeri, če je $|z| = 1$, dobimo *de Moiverovo formulo*:

$$(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + \mathrm{i}\sin n\varphi.$$

PRIMER 1.5.5. Poglejmo si, kaj nam gornja formula npr. pove v primeru $n = 3$.

$$(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)^3 = \cos 3\varphi + \mathrm{i}\sin 3\varphi,$$

po drugi strani pa je

$$(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)^3 = \cos^3\varphi + 3\mathrm{i}\cos^2\varphi\sin\varphi - 3\cos\varphi\sin^2\varphi - \mathrm{i}\sin^3\varphi.$$

Zato velja

$$\cos 3\varphi = \cos^3\varphi - 3\cos\varphi\sin^2\varphi, \qquad \sin 3\varphi = 3\cos^2\varphi\sin\varphi - \sin^3\varphi.$$

PRIMER 1.5.6. Izračunajmo $(1+\mathrm{i})^{100}$. V polarnem zapisu je

$$1 + \mathrm{i} = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}).$$

Zato je

$$(1+\mathrm{i})^{100} = (\sqrt{2})^{100}(\cos\frac{100\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{100\pi}{4}) = 2^{50}(\cos 25\pi + \mathrm{i}\sin 25\pi)) = 2^{50}(-1+0\mathrm{i}) = -2^{50}.$$

Poglejmo si še, kako lahko s pomočjo polarnega zapisa rešujemo enačbo $z^n = w$, kjer je

$$w = \rho(\cos\vartheta + \mathrm{i}\sin\vartheta)$$

dano kompleksno število. Rešitev z prav tako iščimo v polarnem zapisu

$$z = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi).$$

Veljati mora

$$r^n(\cos n\varphi + \mathrm{i}\sin n\varphi) = \rho(\cos\vartheta + \mathrm{i}\sin\vartheta).$$

Zato je $r = \sqrt[n]{\rho}$ in $n\varphi = \vartheta + 2k\pi$, oziroma $\varphi = \frac{\vartheta}{n} + \frac{2k\pi}{n}$. Pri tem je dovolj, da za parameter k vzamemo števila $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$. Torej je

$$z = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\vartheta + 2k\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{\vartheta + 2k\pi}{n}\right), \quad k = 1, 2, \ldots, n-1$$

PRIMER 1.5.7. Poiščimo vse kompleksne rešitve enačbe $z^3 = -1$. V polarnem zapisu je

$$-1 = (\cos\pi + \mathrm{i}\sin\pi).$$

Zato so rešitve enačbe

$$\begin{aligned} z_1 &= \cos\frac{\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}, \\ z_2 &= \cos\frac{3\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{3} = -1, \\ z_3 &= \cos\frac{5\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}. \end{aligned}$$

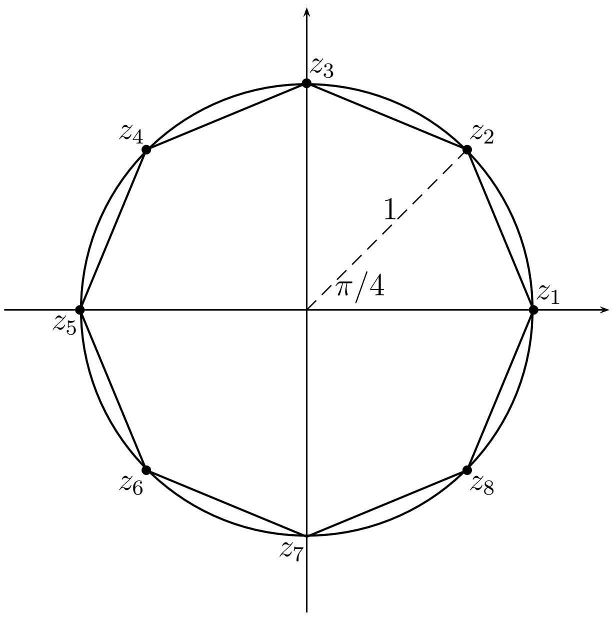
PRIMER 1.5.8. Poiščimo vse kompleksne rešitve enačbe $z^n = 1$. V polarnem zapisu je

$$1 = (\cos 0 + \mathrm{i}\sin 0).$$

Zato so rešitve enačbe

$$z_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{2k\pi}{n}, \ \ k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Rešitve enačbe so torej enakomerno porazdeljene po enotski krožnici in predstavljajo ogljišča pravilnega n kotnika, pri čemer je eno od oglišč 1. Narišimo primer, ko je $n = 8$.



SLIKA 1.4. Osmi koreni enote.

POGLAVJE 2

Zaporedja

DEFINICIJA 2.0.1. *Realno zaporedje* je preslikava iz naravnih števil $\mathbb{N}$ v realna števila $\mathbb{R}$, torej $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

OPOMBA. Običajno pišemo $a_n = f(n)$. Zaporedje lahko podamo tudi tako, da naštejemo člene zaporedja $a_1, a_2, a_3, \ldots$, ali pa s formalnim zapisom $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

PRIMER 2.0.2. Poglejmo si nekaj primerov zaporedij.

- $a_n = 1$, torej $1, 1, 1, \ldots$ je primer konstantnega zaporedja.
- $a_n = n$, torej $1, 2, 3, \ldots$
- $a_n = \frac{1}{n}$, torej $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$
- $a_n = (-1)^n$, torej $-1, 1, -1, 1, \ldots$
- $a_n = \begin{cases} n, & n \text{ sod} \\ \frac{1}{n}, & n \text{ lih} \end{cases}$
- $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$ je Fibonaccijevo zaporedje, kjer je vsak člen vsota predhodnih dveh členov

2.1. Osnovne lastnosti in definicije

DEFINICIJA 2.1.1. Zaporedje $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je *navzgor omejeno*, če obstaja tako število $M \in \mathbb{R}$, da je $a_n \leq M$ za vsak $n \in \mathbb{N}$. Zaporedje je *navzdol omejeno*, če obstaja tako število $m \in \mathbb{R}$, da je $a_n \geq m$ za vsak $n \in \mathbb{N}$. Zaporedje je *omejeno*, če je omejeno navzgor in navzdol.

PRIMER 2.1.2. Za naslednja zaporedja ugotovimo njihovo omejenost.

- $a_n = n$ je omejeno navzdol, ni pa omejeno navzgor.
- $a_n = \frac{1}{n}$ je omejeno navzgor in navzdol, torej je omejeno.
- $a_n = (-1)^n n$ je neomejeno navzgor in navzdol.

DEFINICIJA 2.1.3. *Natančna zgornja meja* zaporedja $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je supremum množice $\{a_n, n \in \mathbb{N}\}$. Če je a supremum zaporedja $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ pišemo $a = \sup a_n$. Podobno definiramo $\inf a_n$ oziroma *natančno spodnjo mejo* zaporedja.

DEFINICIJA 2.1.4. Zaporedje $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je *naraščajoče*, če je $a_n \leq a_{n+1}$ za vsak $n \in \mathbb{N}$. Če je neenakost stroga, rečemo, da je zaporedje *strogo naraščajoče*. Zaporedje $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je *padajoče*, če je $a_n \geq a_{n+1}$ za vsak $n \in \mathbb{N}$ in *strogo padajoče*, če je $a_n > a_{n+1}$ za vsak $n \in \mathbb{N}$.

Opomba. Skupno ime za pojema naraščajoče in padajoče je *monotono*. Če torej rečemo, da je zaporedje monotono, pomeni, da je ali naraščajoče, ali pa padajoče.

Primer 2.1.5. Poglejmo si monotonost naslednjih zaporedij.

- $1, 2, 3, \ldots$ je strogo naraščajoče zaporedje.
- $1, 1, 1, \ldots$ je naraščajoče in tudi padajoče.
- $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$ je strogo padajoče zaporedje.
- $1, -2, 3, -4, 5, \ldots$ ni niti naraščajoče, niti padajoče.

Definicija 2.1.6. Naj bo $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ zaporedje in naj bodo $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$ neka naravna števila. Zaporedje $a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \ldots$ je *podzaporedje* zaporedja $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, prerejeno izboru $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$.

Primer 2.1.7. Naj bo $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ zaporedje podano z

$$a_n = \begin{cases} n, & n \text{ sod} \\ \frac{1}{n}, & n \text{ lih} \end{cases}$$

Če iz zaporedja izberemo samo člene s sodim indeksom, dobimo podzaporedje $2, 4, 6, \ldots$ zaporedja $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Če izberemo samo člene z lihim indeksom, dobimo podzaporedje $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \ldots$ Seveda to niso edina podzaporedja.

2.2. Stekališča zaporedja

Definicija 2.2.1. *Okolica* števila a je vsak odprt interval, ki vsebuje točko a. *ε-okolica* točke $a \in \mathbb{R}$ je interval $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$.

Definicija 2.2.2. Število a je *stekališče* zaporedja $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, če je v vsaki ε-okolici števila a neskončno mnogo členov zaporedja $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Z drugimi besedami mora za vsak $\varepsilon > 0$, neenakost $|a_n - a| < \varepsilon$ veljati za neskončno mnogo indeksov n.

Primer 2.2.3. Poglejmo si nekaj primerov.

- Zaporedje $1, 1, 1, \ldots$ ima eno samo stekališče, in to 1. V vsaki okolici števila 1 je ne samo neskončno mnogo členov zaporedja, ampak so v njej celo vsi členi zaporedja.
- Zaporedje $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$ ima eno samo stekališče 0. Naj bo $\varepsilon > 0$. V ε-okolici števila 0 so vsi členi a_n , za katere velja $n > 1/\varepsilon$.
- Zaporedje $a_n = n$ nima nobenega stekališča.
- $a_n = \begin{cases} n, & n \text{ sod} \\ \frac{1}{n}, & n \text{ lih} \end{cases}$ ima za stekališče število 0. V ε-okolico pridejo vsi lihi členi, z dovolj velikimi indeksi.
- Zapordje $1, -1, 1, -1, \ldots$ ima dve stekališči, 1 in -1.
- Zaporedje $1, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, \ldots$ ima za stekališča vsa naravna števila, saj se vsako naravno število v zaporedju ponovi neskončnokrat.

Kot smo videli, imajo zaporedja lahko različno število stekališč. Naslednji izrek je eden od osnovnih izrekov pri zaporedjih.

Izrek 2.2.4. *Vsako (na obe strani) omejeno zaporedje ima vsaj eno stekališče.*

Dokaz. Naj bo $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ omejeno zaporedje. Definirajmo množico

$$U = \{x \in \mathbb{R}, \text{ strogo levo od } x \text{ je največ končno mnogo členov zaporedja } \{a_n\}_{n=1}^{\infty}\}.$$

Pokažimo, da je U neprazna navzgor omejena množica. Neprazna je zato, ker je vsako število, manjše od spodnje meje zaporedja, v množici U. Navzgor omejeno je zato, ker nobeno število večje od zgornje meje zaporedja $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ni v U. Torej ima množica U natančno zgornjo mejo. Označimo $a = \sup U$. Ker je strogo levo od $a + \varepsilon$ neskončno mnogo členov zaporedja $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ in je strogo levo od $a - \varepsilon$ le končno mnogo členov zaporedja $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, je a stekališče zaporedja a_n. □

2.3. Limita zaporedja

Definicija 2.3.1. Število a je *limita* zaporedja $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, če je so v vsaki ε-okolici števila a vsi členi zaporedja $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ od nekje dalje. Z drugimi besedami, a je limita zaporedja $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja $n_0 \in \mathbb{N}$, da velja $|a_n - a| < \varepsilon$ za vsak $n \geq n_0$. Pišemo $a = \lim_{n\to\infty} a_n$. Če ima zaporedje limito, rečemo, da je *konvergentno*, če limite nima, pa je *divergentno*.

Izrek 2.3.2. *Zaporedje ima lahko največ eno limito.*

Dokaz. Recimo, da ima zaporedje $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ dve limiti $a \neq b$ in naj bo $\varepsilon = |b - a|/2$ polovica razdalje med a in b. Iz definicije limite sledi, da so vsi členi od nekje dalje tako na intervalu $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ kot tudi na intervalu $(b - \varepsilon, b + \varepsilon)$. To pa ni mogoče, saj sta intervala disjunktna. □

Primer 2.3.3. Poglejmo, ali imajo naslednja zaporedja limite.

- Zaporedje $a_n = 1$ ima limito 1.
- Zaporedje $a_n = (-1)^n$ nima limite.
- Zaporedje $a_n = 1/n$ ima limito 0.
- Zaporedje $a_n = n$ nima limite, vendar pogosto v takih primerih rečemo, da je limita ∞.

Primer 2.3.4. Po definiciji preverimo, da velja

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1.$$

Naj bo $\varepsilon > 0$. Potem velja $|\frac{n}{n+1} - 1| < \varepsilon$ natanko tedaj, ko je $\frac{1}{n+1} < \varepsilon$. Če vzamemo n_0 prvo naravno število večje od $1/\varepsilon$ bo veljalo, da je $|a_n - 1| < \varepsilon$ če je le $n \geq n_0$.

Pri stekališču smo zahtevali, da je v vsaki ε-okolici neskončno mnogo členov zaporedja, pri limiti pa zahtevamo, da so tam vsi členi, od nekega dalje. Zaporedje ima tako lahko mnogo stekališč, vendar pa ima samo eno limito. Torej:

Limita je stekališče, ni pa vsako stekališče limita.

Izrek 2.3.5. *Vsako konvergentno zaporedje je omejeno.*

Dokaz. Naj bo a limita zaporedja $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Potem so za nek n_0 vsi členi od n_0-tega dalje na intervalu $(a-1, a+1)$. Če definiramo $m = \min\{a_1, a_2, \ldots, a_{n_0-1}, a-1\}$ in $M = \max\{a_1, a_2, \ldots, a_{n_0-1}, a+1\}$ sta to zagotovo spodnja in zgornja meja zaporedja $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. $\square$

Seveda pa nima vsako omejeno zaporedje limite (ima pa stekališče, kot smo videli v prejšnjem razdelku). Če poleg omejenosti zahtevamo še monotonost, pa je zaporedje res konvergentno:

Izrek 2.3.6. *Vsako monotono in omejeno zaporedje ima limito.*

Dokaz. Naj bo $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ naraščajoče in navzgor omejeno. Naj bo $a = \sup a_n$. Supremum seveda obstaja, saj je zaporedje navzgor omejeno. Pokažimo, da je a tudi limita zaporedja $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Naj bo $\varepsilon > 0$. Ker $a - \varepsilon$ ni zgornja meja, obstaja tak člen a_{n_0}, da velja $a_{n_0} > a - \varepsilon$. Ker je zaporedje naraščajoče in zato $a_n \geq a_{n_0}$ za vsak $n \geq n_0$ velja, da je $a_n > a - \varepsilon$ za vsak $n \geq n_0$. Ker noben člen zaporedja ni večji od a, seveda velja, da je $|a_n - a| < \varepsilon$ za vsak $n \geq n_0$. Povsem analogno trditev dokažemo za padajoča in navzdol omejena zaporedja. $\square$

Zaporedje, ki ima več kot eno stekališče zagotovo nima limite. Ni pa nujno, da je edino stekališče zaporedja tudi njegova limita, kot lahko vidimo iz zaporedja $1, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{3}, 4, \frac{1}{4}, \ldots$ To zaporedje ima namreč eno samo stekališče 0, nima pa limite, ker ni omejeno. Velja pa:

Izrek 2.3.7. *Če je zaporedje omejeno in ima eno samo stekališče, je to stekališče limita zaporedja.*

Dokaz. Naj bo zaporedje $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ omejeno navzdol z m in navzgor z M in naj bo a njegovo edino stekališče. Naj bo $\varepsilon > 0$. Če niso vsi členi od nekje dalje v $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ jih mora biti neskončno zunaj tega intervala. Torej jih je neskončno ali na intervalu $[m, a-\varepsilon]$, ali na intervalu $[a+\varepsilon, M]$. Zato bi moralo na enem izmed teh dveh intervalov biti še eno stekališče zaporedja. Dobili smo torej protislovje. $\square$

Poglejmo si, kako so povezana stekališča in limite zaporedja in njegovih podzaporedij.

Izrek 2.3.8. *Naj bo $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergentno zaporedje z limito a. Potem je vsako podzaporedje zaporedja $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ tudi konvergentno, in ima limito a.*

DOKAZ. Dokaz sledi direktno iz definicije. □

IZREK 2.3.9. *Za vsako stekališče c zaporedja $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ obstaja podzaporedje zaporedja a_n, ki konvergira proti c. Obratno, naj bo c limita nekega podzaporedja zaporedja $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, potem je c stekališče zaporedja $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.*

DOKAZ. Naj bo c stekališče zaporedja a_n. Potem obstaja a_{n_1}, da je $|a_{n_1} - c| < 1$, saj je v tej okolici celo neskončno mnogo členov zaporedja. Naj bo a_{n_2} tak, da velja $|a_{n_2} - 2| < 1/2$ in hkrati $n_2 > n_1$. Tak člen obstaja, saj je neskončno mnogo členov zaporedja v 1/2-okolici števila a. Nadalje naj bo a_{n_3} tak, da je $|a_{n_3} - a| < 1/3$ in $n_3 > n_2$. Postopek nadaljujemo. Tako dobimo podzaporedje $\{a_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}$ ki konvergira proti a. Naj bo sedaj $c = \lim_{n\to\infty} a_{n_i}$. Ker so za vsak $\varepsilon > 0$ vsi členi zaporedja $\{a_{n_i}\}$ od nekje dalje v ε-okolici števila c, je seveda neskončno mnogo členov zaporedja $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ v tej okolici. □

PRIMER 2.3.10. Poglejmo si zaporedje

$$1, 1/2, 1/3, 3/4, 1/5, 5/6, 1/7 \ldots.$$

Zaporedje ima dve stekališči, 0 in 1. Podzaporedje $1, 1/3, 1/5, \ldots$ konvergira proti 0, podzaporedje $1/2, 3/4, 5/6, \ldots$ pa proti 1.

S pomočjo zadnje trditve in izreka iz prejšnjega razdelka, lahko izpeljemo naslednji izrek:

IZREK 2.3.11. *Vsako omejeno zaporedje ima konvergentno podzaporedje.*

DOKAZ. Dokazali smo že, da ima vsako omejeno zaporedje vsaj eno stekališče. Prejšnja trditev nam pove, da lahko najdemo podzaporedje, ki bo k temu stekališču konvergiralo. □

2.4. Pravila za računanje limit

V tem razdelku si bomo pogledali osnovna pravila, s pomočjo katerih računamo limite zaporedij.

IZREK 2.4.1. *Naj bosta $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ in $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergentni zaporedji z limitama $a = \lim_{n\to\infty} a_n$ in $b = \lim_{n\to\infty} b_n$. Potem so konvergentna tudi zaporedja $\{a_n + b_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{a_n - b_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{a_n b_n\}_{n=1}^{\infty}$ in $\{\lambda a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Če velja še $b_n \neq 0$ za vsak n in je $b \neq 0$, sta konvergentni tudi $\{1/b_n\}_{n=1}^{\infty}$ in $\{a_n/b_n\}_{n=1}^{\infty}$. Velja*

(i) $\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = a \pm b$
(ii) $\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = ab$
(iii) $\lim_{n\to\infty}(\lambda a_n) = \lambda a$
(iv) $\lim_{n\to\infty}(1/b_n) = 1/b$
(v) $\lim_{n\to\infty}(a_n/b_n) = a/b$

Dokaz. (i) Naj bo $\varepsilon > 0$ in naj bosta n' in n'' taka, da velja $|a_n - a| < \varepsilon/2$ za $n \geq n'$ in $|b_n - b| < \varepsilon/2$ za $n \geq n''$. Naj bo $n_0 = \max\{n', n''\}$. Potem za $n \geq n_0$ velja

$$|a_n + b_n - (a+b)| < |a_n - a| + |b_n - b| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Podobno dokažemo za razliko $a_n - b_n$. (ii) Ker je a_n konvergentno zaporedje, je tudi omejeno, in zato velja $|a_n| < M$ za nek M in za vsak n. Naj bo sedaj n_0 tak, da za $n \geq n_0$ velja $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{M+|b|}$ in tudi $|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{M+|b|}$. Zato za $n \geq n_0$ velja

$$\begin{aligned}|a_nb_n - ab| &= |a_nb_n - a_nb + a_nb - ab| \leq |a_nb_n - a_nb| + |a_nb - ab| \\ &= |a_n||b_n - b| + |b||a_n - a| < M\frac{\varepsilon}{M+|b|} + |b|\frac{\varepsilon}{M+|b|} = \varepsilon.\end{aligned}$$

(iii) Izjava sledi iz (ii), če za zaporedje $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ vzamemo zaporedje $b_n = \lambda$ (iv) Ker smo predpostavili, da je $b = \lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$, so vsi členi zaporedja $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ od nekega n' dalje v okolici $(b - |b|/2, b + |b|/2)$. Naj bo n'' tak, da je $|b_n - b| < \frac{b^2\varepsilon}{2}$, če je $n \geq n''$. Naj bo sedaj $n_0 = \max\{n', n''\}$ in $n \geq n_0$. Velja $|1/b_n - 1/b| = |(b - b_n)/(bb_n)| \leq \frac{2|b_n - b|}{b^2} < \varepsilon$. (v) Sledi iz (ii) in (iv) □

Kako lahko formalno uporabimo zgornja pravili, si poglejmo na naslednjem primeru.

Primer 2.4.2. Izračunajmo limito

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^4 - n^2 + n + 7}{2n^4 - n^3 + n^2 + 4}.$$

Če delimo števec in imenovalec z n^4 dobimo

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^4 - n^2 + n + 7}{2n^4 - n^3 + n^2 + 4} = \lim_{n\to\infty} \frac{3 - 1/n^2 + 1/n^3 + 7/n^4}{2 - 1/n + 1/n^2 + 4/n^4}.$$

Limita števca je

$$\lim_{n\to\infty}\left(3 - \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} + \frac{7}{n^4}\right) = 3 - \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2} + \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3} + 7\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^4} = 3$$

in limita imenovalca je

$$\lim_{n\to\infty}\left(2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{4}{n^4}\right) = 2 - \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} + \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2} + 4\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^4} = 2.$$

Ker je limita kvocienta kvocient limit, je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^4 - n^2 + n + 7}{2n^4 - n^3 + n^2 + 4} = \frac{3}{2}.$$

2.5. Limita $\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

Izrek 2.5.1. *Zaporedje $a_n = \lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n})^n$ je naraščajoče, navzgor omejeno in zato konvergentno.*

Dokaz. Z uporabo binomske formule lahko zapišemo

$$\begin{aligned}
(1+\frac{1}{n})^n &= 1+1+\frac{1}{2!}\frac{n(n-1)}{n^2}+\frac{1}{3!}\frac{n(n-1)(n-2)}{n^3}+\cdots+\frac{1}{n!}\frac{n(n-1)\cdots 1}{n^n}\\
&= 2+\frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n})+\frac{1}{3!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\\
&\qquad +\cdots+\frac{1}{n!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\cdots(1-\frac{n-1}{n})\\
&\le 2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}\le 2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\\
&= 1+\frac{1-(1/2)^n}{1-1/2}=3-(1/2)^{n-1}.
\end{aligned}$$

Torej je $a_n < 3$ za vsak n in s tem zaporedje omejeno. Če zapišemo zgornjo neenakost namesto za n za $n+1$, dobimo

$$\begin{aligned}
(1+\frac{1}{n+1})^{n+1} =& 2+\frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n+1})+\frac{1}{3!}(1-\frac{1}{n+1})(1-\frac{2}{n+1})+\cdots+\\
&\frac{1}{n!}(1-\frac{1}{n+1})(1-\frac{2}{n+1})\cdots(1-\frac{n-1}{n+1})\\
&+\frac{1}{(n+1)!}(1-\frac{1}{n+1})(1-\frac{2}{n+1})\cdots(1-\frac{n}{n+1}).
\end{aligned}$$

Ko torej primerjamo člen po člen pri razvoju a_n ter a_{n+1} vidimo, da je $a_n < a_{n+1}$. Zaporedje je torej tudi naraščajoče, zato je konvergentno. □

Zaporedje $a_n = (1+\frac{1}{n})^n$ ima torej limito. To limito označimo z e (Eulerjevo število). Izkaže se, da je e iracionalno in celo transcendentno število in njegova vrednost je približno

$$e = 2,7182818284\ldots$$

Poglejmo še, da zaporedje $b_n = (1-\frac{1}{n})^{-n}$ prav tako konvergira proti e.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n} &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n-1}\right)^n\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)\\
&= e
\end{aligned}$$

Obe limiti skupaj lahko zapišemo s formulo

$$\lim_{n\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

2.6. Cauchyjeva zaporedja

Razen za monotona zaporedja, kjer je omejenost že zadosten pogoj za konvergenco, konvergentnosti zaporedja zaenkrat se ne znamo preveriti, ne da bi že prej poznali potencialno limito. Cauchyjeva lastnost, ki jo bomo obravnavali v tem razdelku, nam bo dala potreben in zadosten pogoj za konvergenco vsakega zaporedja, ne da bi prej že poznali limito. Koristnost Cauchyjevega pogoja bo očitna v naslednjem poglavju, kjer bomo obravnavali vrste.

DEFINICIJA 2.6.1. Zaporedje $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je *Cauchyjevo*, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $n_0 \in \mathbb{N}$, da je $|a_n - a_m| < \varepsilon$ za vsaka $m, n \geq n_0$.

IZREK 2.6.2. *Zaporedje $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je konvergentno natanko tedaj, ko je Cauchyjevo.*

DOKAZ. Predpostavimo najprej, da je zaporedje $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergentno z limito a. Torej za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak n_0, da je $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$, če je le $n \geq n_0$. Vzemimo sedaj indeksa $m, n \geq n_0$. Velja $|a_n - a_m| = |a_n - a + a - a_m| \leq |a_n - a| + |a_m - a| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Torej je $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ Cauchyjevo. Dokažimo še obrat. Naj bo sedaj $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ Cauchyjevo. Zato posebej za npr. $\varepsilon = 1$ obstaja n_0, da velja $|a_n - a_m| < 1$, če sta le $m, n \geq n_0$. Če za m vzamemo kar n_0 je zato $a_n \in (a_{n_0} - 1, a_{n_0} + 1)$ za vsak $n \geq n_0$. Ker je tako zunaj tega intervala lahko le končno mnogo členov, je zaporedje $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ omejeno in ima zato vsaj eno stekališče. Če pokažemo, da zaporedje $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ne more imeti dveh različnih stekališč, s pomočjo trditve v prejšnjem razdelku sledi, da je zaporedje konvergentno. Naj bosta torej $a < b$ dve stekališči in $\varepsilon = \frac{b-a}{3}$. Naj bo n_0 poljubno naravno število. Ker je neskončno mnogo členov zaporedja ε blizu a in neskončno mnogo členov ε blizu b, zagotovo obstajata dva člena a_n in a_m z indeksoma $n, m \geq n_0$, da velja $|a_n - a| < \varepsilon$ in $|a_m - b| < \varepsilon$. Seveda je potem $|a_n - a_m| > \varepsilon$. Ker lahko taka dva indeksa najdemo za poljuben n_0, zaporedje ni Cauchyjevo. Torej ima zaporedje $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ lahko samo eno stekališče in je s tem izrek dokazan. $\square$

POGLAVJE 3

Številske vrste

DEFINICIJA 3.0.1. *Številska vrsta* je vsaka formalna neskončna vsota oblike

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots,$$

kjer so $a_1, a_2, a_3, \ldots$ neka realna števila. Število a_i imenujemo i-ti člen vrste.

Namesto $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$ pogosto krajše pišemo $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. V definiciji številske vrste ne govorimo ničesar o potencialni vsoti te vrste, ampak gre zgolj za formalen zapis neskončne vsote.

PRIMER 3.0.2. Poglejmo si nekaj primerov številskih vrst.

- $1 + 1 + 1 + \cdots$
- $1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$
- $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots$
- $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$
- $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$

Če začnemo zaporedoma seštevati člene vrste, lahko hitro ugotovimo, da bomo šli pri prvi od naštetih vrst prek vseh meja. Verjetno bi tudi hitro ugotovili, da se tretja vrsta dejansko sešteje v neko število. Več težav pa bi imeli pri ostalih vrstah. Poglejmo si sedaj, kako formalno definiramo vsoto vrste.

DEFINICIJA 3.0.3. Naj bo $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$ številska vrsta. Vsoto

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

imenujemo *n-ta delna vsota* vrste. Vrsta *konvergira*, če obstaja limita

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n$$

in v tem primeru imenujemo S *vsota vrste* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ in pišemo

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots.$$

Če zgornja limita ne obstaja, rečemo, da je vrsta divergentna.

PRIMER 3.0.4. Oglejmo si vrsto

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}.$$

Enostavno lahko preverimo enakost

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

Zato je S_n enak

$$\begin{aligned}
S_n &= \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} \\
&= (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + \cdots + (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}) \\
&= 1 - \frac{1}{n+1}.
\end{aligned}$$

Torej je $\lim_{n\to\infty} S_n = 1$, vrsta konvergira in ima vsoto 1.

Primer 3.0.5 (Geometrijska vrsta). Poglejmo si, za katere q konvergira *geometrijska vrsta*

$$1 + q + q^2 + q^3 + \cdots$$

in pri teh vrednostih q izračunajmo njeno vsoto. Označimo z

$$S_n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n$$

n-to delno vsoto geometrijske vrste. Velja

$$qS_n - S_n = q + q^2 + q^3 + \cdots + q^{n+1} - 1 - q - q^2 - \cdots - q^n = q^{n+1} - 1.$$

V kolikor $q \neq 1$ dobimo formulo

$$S_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1-q}.$$

Limita $\lim_{n\to\infty} S_n$ obstaja natanko tedaj, ko je $|q| < 1$, in dobimo

$$1 + q + q^2 + q^3 + \cdots = \frac{1}{1-q}, \qquad |q| < 1.$$

Pri $|q| \geq 1$ vrsta divergira.

Primer 3.0.6. Poglejmo si *harmonično vrsto*

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \cdots$$

Označimo z S_n n-to delno vsoto in si jo oglejmo pri $n = 2^k$:

$$\begin{aligned}
S_{2^k} &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} \cdots \frac{1}{2^k} \\
&> 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \cdots \frac{1}{2^k} \\
&= 1 + \frac{1}{2} + 2\cdot\frac{1}{4} + 4\cdot\frac{1}{8} + \cdots + 2^{k-1}\frac{1}{2^k} \\
&= 1 + \frac{k}{2}.
\end{aligned}$$

Ker gre torej podzaporedje S_{2^k} zaporedja delnih vsot harmonične vrste proti neskončno, vrsta divergira.

PRIMER 3.0.7. Poglejmo si vrsto

$$1 - 1 + 1 - 1 + \cdots .$$

Velja $S_{2n} = 0$ in $S_{2n-1} = 1$ in je zaporedje delnih vsot enako

$$1, 0, 1, 0, 1, \ldots$$

To zaporedje nima limite in zato vrsta divergira.

3.1. Osnovne lastnosti in pravila

Naslednji izrek takoj sledi iz Cauchyjevega pogoja za zaporedja.

IZREK 3.1.1 (Cauchyjev pogoj). *Vrsta $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$ konvergira natanko tedaj, ko za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak n_0, da za vsak $n \geq n_0$ in vsak $k \in \mathbb{N}$ velja*

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+k}| < \varepsilon.$$

Preprosta posledica tega izreka, kjer smo vzeli $k = 1$, je

POSLEDICA 3.1.2. *Naj bo $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$ konvergentna. Potem velja*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

OPOMBA. Pomni, da obrat te posledice ne velja. Dejstvo, da gredo členi vrste proti 0 se zdaleč ne zagotavlja, da vrsta konvergira. Primer take vrste je harmonična vrsta $1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + \cdots$.

Povejmo še, da konvergenca vrste ni odvisna od prvih nekaj členov vrste, temveč je pomembno samo, kako se obnaša 'rep' vrste, oziroma, kako hitro gredo členi vrste proti 0. Jasno pa tudi prvi členi vrste vplivajo na samo vsoto vrste.
Naslednji dve pravili preprosto sledita iz podobnih pravil za zaporedja, saj je vsota vrst limita zaporedja delnih vsot.

IZREK 3.1.3. *Naj bosta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ in $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergentni in $c \in \mathbb{R}$. Potem konvergirajo vrste $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$, $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ in $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - b_n)$ in velja*

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = c\sum_{n=1}^{\infty} a_n$
(ii) $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

3.2. Kriteriji za konvergenco vrst z nenegativnimi členi

Vrste $a_1+a_2+a_3+\cdots$, kjer so vsi členi a_k nenegativni, so enostavnejše pri obravnavanju konvergence, saj je zaporedje delnih vsot pri takih vrstah naraščajoče. Za konvergenco je zato potrebno preveriti le omejenost delnih vsot. Zapišimo to kot izrek.

IZREK 3.2.1. *Vrsta* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, *kjer so* $a_k \geq 0$ *za vsak* k, *konvergira natanko tedaj, ko je zaporedje delnih vsot navzgor omejeno.*

Naslednjo trditev imenujemo primerjalni kriterij.

IZREK 3.2.2. *Naj bosta* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *in* $\sum_{n=1}^{\infty} a_b$ *dve vrsti z nenegativnimi členi in naj velja* $a_k \leq b_k$ *za vsak* k. *Potem velja*

(i) *Če* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *konvergira, konvergira tudi* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.
(ii) *Če* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *divergira, divergira tudi* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

DOKAZ. Naj bosta S_n' in S_n'' n-ti delni vsoti vrst $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ oziroma $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Ker velja $S_n' \leq S_n''$ za vsak n, iz omejenosti delnih vsot S_n'' sledi omejenost delnih vsot S_n'. Podobno iz neomejenosti S_n' sledi neomejenost S_n''. Prejšnja trditev pove, da je omejenost delnih vsot pri vrstah z nenegativnimi členi ekvivalentna konvergenci. □

PRIMER 3.2.3. Poglejmo si, za katere $s \in \mathbb{R}$ konvergira vrsta

$$1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} \cdots$$

Ker za $s \leq 1$ velja

$$1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \cdots \geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots,$$

nam primerjalni kriterij pove, da vrsta divergira za $s \leq 1$, saj harmonična vrsta divergira. Naj bo sedaj $s > 1$. Velja

$$\begin{aligned}
1 &+ \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{6^s} + \frac{1}{7^s} + \frac{1}{8^s} + \cdots \\
&< 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{8^s} + \cdots \\
&= 1 + \frac{2}{2^s} + \frac{4}{4^s} + \frac{8}{8^s} + \cdots \\
&= 1 + \frac{1}{2^{s-1}} + \frac{1}{2^{2(s-1)}} + \frac{1}{2^{3(s-1)}} + \cdots \\
&< \infty.
\end{aligned}$$

Primerjalni kriterij nam pove, da vrsta pri $s > 1$ konvergira.
Vsoto teh vrst ni lahko izračunati. Kot zanimivost omenimo, da pri $s = 2$ velja

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}.$$

IZREK 3.2.4 (D'Alembertov kvocientni kriterij). *Naj bo* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *vrsta s pozitivnimi členi. Označimo*

$$D_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

Tedaj velja

(i) *Če obstaja* $q < 1$ *da velja* $D_n \leq q$ *za vse* n *večje od nekega* n_0, *vrsta konvergira.*

(ii)) *Če velja* $D_n \geq 1$ *za vse* n *večje od nekega* n_0*, vrsta divergira.*

Posebej, če obstaja limita $\lim_{n\to\infty} D_n = D$*, velja*

(i') *Če je* $D < 1$ *vrsta konvergira.*
(ii') *Če je* $D > 1$ *vrsta divergira.*
(iii') *Če je* $D = 1$ *ne moremo sklepati o konvergenci vrste.*

Dokaz. Dovolj je, da dokažemo točki (i) in (ii), saj ostalo sledi. Naj bo n_0 tak, da velja $D_n \leq q < 1$ za vse $n > n_0$. Potem imamo

$$\begin{aligned}
&a_1 + a_2 + \cdots + a_{n_0} + a_{n_0+1} + a_{n_0+2} + a_{n_0+3} + \cdots \\
&\leq (a_1 + a_2 + \cdots + a_{n_0}) + a_{n_0+1} + q a_{n_0+1} + q^2 a_{n_0+1} \cdots \\
&= (a_1 + a_2 + \cdots + a_{n_0}) + a_{n_0+1}(1 + q + q^2 + \cdots) \\
&< \infty.
\end{aligned}$$

Po primerjalnem kriteriju torej vrsta konvergira. V primeru (ii) že sami členi vrste ne konvergirajo proti 0, zato vrsta divergira. □

Primer 3.2.5. Poglejmo si nekaj primerov uporabe kvocientnega kriterija.

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$. $D_n = \frac{\frac{n+1}{2^{n+1}}}{\frac{n}{2^n}} = \frac{n+1}{2n}$. Velja $\lim_{n\to\infty} D_n = \frac{1}{2} < 1$, zato vrsta konvergira.
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$. $D_n = \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \frac{1}{n+1}$. Velja $\lim_{n\to\infty} D_n = 0 < 1$, zato vrsta konvergira.
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$. $D_n = \frac{n^s}{(n+1)^s}$ in $\lim_{n\to\infty} D_n = 1$. Kriterij nam ne pove ničesar o konvergenci vrte. Vidimo lahko, da kvocientni kriterij 'ni zadosti dober', da bi zaznal konvergenco teh vrst.

Izrek 3.2.6 (Cauchyjev korenski kriterij). *Naj bo* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *vrsta z nenegativnimi členi. Označimo*

$$C_n = \sqrt[n]{a_n}.$$

Tedaj velja

(i) *Če obstaja* $q < 1$ *da velja* $C_n \leq q$ *za vse* n *večje od nekega* n_0*, vrsta konvergira.*
(ii) *Če velja* $C_n \geq 1$ *za vse* n *večje od nekega* n_0*, vrsta divergira.*

Posebej, če obstaja limita $\lim_{n\to\infty} C_n = C$*, velja*

(i') *Če je* $C < 1$ *vrsta konvergira.*
(ii') *Če je* $C > 1$ *vrsta divergira.*
(iii') *Če je* $C = 1$ *ne moremo sklepati o konvergenci vrste.*

Dokaz. Dovolj je, da dokažemo točki (i) in (ii), saj ostalo sledi. Naj bo n_0 tak, da velja $C_n \leq q < 1$ za vse $n > n_0$. Potem imamo

$$\begin{aligned} & a_1 + a_2 + \cdots + a_{n_0} + a_{n_0+1} + a_{n_0+2} + a_{n_0+3} + \cdots \\ & \leq (a_1 + a_2 + \cdots + a_{n_0}) + q^{n_0+1} + q^{n_0+2} + q^{n_0+3} \cdots \\ & = (a_1 + a_2 + \cdots + a_{n_0}) + q^{n_0+1}(1 + q + q^2 + \cdots) \\ & < \infty. \end{aligned}$$

Po primerjalnem kriteriju torej vrsta konvergira. V primeru (ii) že sami členi vrste ne konvergirajo proti 0, zato vrsta divergira. □

Primer 3.2.7. Poglejmo si nekaj primerov uporabe kvocientnega kriterija.

- $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln^n n}$. $C_n = \sqrt[n]{\frac{1}{\ln^n n}} = \frac{1}{\ln n}$. Velja $\lim_{n\to\infty} C_n = 0 < 1$, zato vrsta konvergira.
- $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a}{n}\right)^n$. $C_n = \frac{a}{n}$. Velja $\lim_{n\to\infty} C_n = 0 < 1$, zato vrsta konvergira.
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$. $C_n = \sqrt[n]{\frac{1}{n^s}} = 1/(\sqrt[n]{n})^s$ in $\lim_{n\to\infty} C_n = 1$. Kriterij nam ne pove ničesar o konvergenci vrte. Korenski kriterij prav tako 'ni zadosti dober', da bi zaznal konvergenco teh vrst, kar pa ni presenetljivo, saj tako kvocientni kot korenski kriterij pri primerjavi uporabljata geometrijsko vrsto, konvergenca le te pa je dosti hitrejša kot konvergenca vrste $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$.

Naslednji kriterij je nekoliko bolj neprijeten za uporabo, vendar nam da boljše rezultate, saj vrsto ne primerja z geometrijsko vrsto, ampak z vrsto $1 + 1/2^s + 1/3^s \cdots$. Kriterij bomo navedli brez dokaza.

Izrek 3.2.8 (Raabejev kriterij). *Naj bo $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ vrsta s pozitivnimi členi. Označimo*

$$R_n = n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right)$$

Tedaj velja

(i) *Če obstaja $q > 1$ da velja $R > q$ za vse n večje od nekega n_0, vrsta konvergira.*
(ii) *Če velja $R \leq 1$ za vse n večje od nekega n_0, vrsta divergira.*

Posebej, če obstaja limita $\lim_{n\to\infty} R_n = R$, velja

(i') *Če je $R > 1$ vrsta konvergira.*
(ii') *Če je $R < 1$ vrsta divergira.*
(iii') *Če je $R = 1$ ne moremo sklepati o konvergenci vrste.*

Dokaz. Brez dokaza. □

Primer 3.2.9. Poglejmo si konvergenco vrste

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}.$$

Poskusimo uporabiti Raabejev kriterij.

$$R_n = n\left(\frac{(n+1)^2\ln(n+1)}{n^2\ln n} - 1\right) = \left(\frac{n^2\ln(1+1/n) + (2n+1)\ln(n+1)}{n\ln n}\right)$$
$$= \frac{\ln(1+1/n)^n}{\ln n} + (2+1/n)\frac{\ln(n+1)}{\ln n} = \frac{\ln(1+1/n)^n}{\ln n} + (2+1/n)\left(1+\frac{\ln(1+1/n)}{\ln n}\right) \to 2$$

Vrsta torej konvergira.

3.3. Alternirjoče vrste

Alternirajoče vrste so vrste oblike

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - \cdots,$$

kjer so $a_n > 0$. Za nekatere take vrste imamo zelo enostavno preverljiv kriterij za ugotavljanje konvergence.

Izrek 3.3.1 (Leibnizov kriterij). *Naj bo*

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - \cdots,$$

alternirajoča vrsta. Naj velja $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \cdots$. *Potem vrsta konvergira natanko tedaj, ko velja*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Dokaz. Naj bo S_{2n} delna vsota vrste pri sodem indeksu $2n$ in S_{2n+1} delna vsota pri lihem indeksu $2n+1$. Velja $S_{2n+2} = S_{2n} + a_{2n+1} - a_{2n+2}$. Ker velja $a_{2n+1} \geq a_{2n+2}$ dobimo

$$S_{2n} \leq S_{2n+2}.$$

Podobno je $S_{2n+1} = S_{2n-1} - a_{2n} + a_{2n+1}$ in zato

$$S_{2n+1} \leq S_{2n-1}.$$

Velja pa tudi

$$S_{2n+1} = S_{2n} + a_{2n+1} > S_{2n}$$

in če malo pomislimo, dobimo

$$S_1 \geq S_3 \geq S_5 \geq \cdots \geq \cdots \geq S_6 \geq S_4 \geq S_2.$$

Označimo

$$S' = \lim_{n\to\infty} S_{2n+1}, \qquad S'' = \lim_{n\to\infty} S_{2n}.$$

Obe limiti obstajata, saj je prvo zaporedje padajoče, drugo pa naraščajoče. Velja tudi $S' \geq S''$. Zaporedje delnih vsot S_n bo imelo limito natanko tedaj, ko bo $S' = S''$, kar pomeni

$$S' - S'' = \lim_{n\to\infty} S_{2n+1} - \lim_{n\to\infty} S_{2n} = \lim_{n\to\infty}(S_{2n+1} - S_{2n}) = a_{2n+1} = 0.$$

S tem je trditev dokazana. □

Primer 3.3.2. Vrsta

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots$$

zadošča pogojem Leibnizovega kriterija, saj velja

$$\frac{1}{n}\geq\frac{1}{n+1} \text{ in } \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0.$$

Zato vrsta konvergira. Naj omenimo, da je vsota te vrste enaka $\ln 2$, kar pa zaenkrat še ne znamo dokazati.

3.4. Pogojna in absolutna konvergenca

V prejšnjih dveh razdelkih smo obravnavali konvergenco vrst z nenegativnimi členi in alternirajočih vrst. Sedaj se bomo lotili splošnih vrst.

Definicija 3.4.1. Vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je *absolutno konvergentna*, če konvergira vrsta $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$. V kolikor vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira, ni pa absolutno konvergentna, rečemo, da je *pogojno konvergentna.*

Izrek 3.4.2. *Če je vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutno konvergentna, je tudi konvergentna.*

Dokaz. Naj bo $S_n'=\sum_{k=1}^{n}|a_k|$ in $S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$. Naj bo $\varepsilon>0$. Ker je S_n' konvergentno, je Cauchyjevo. Naj bo $\varepsilon>0$ in n_0 tak, da je $|S_m'-S_n'|<\varepsilon$, če sta le $n,m\geq n_0$. Velja

$$\begin{aligned}|S_m-S_n|&=|a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_m|\\ &\leq|a_{n+1}|+|a_{n+2}|+\cdots+|a_m|=|S_m'-S_n'|<\varepsilon.\end{aligned}$$

Torej je tudi S_n Cauchyjevo, zato konvergentno, in vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira. □

Primer 3.4.3. Primera absolutno konvergentne vrste sta na primer

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n,\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2},$$

primer pogojno konvergentne vrste pa je harmonična vrsta

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\cdots.$$

Preureditev vrst. Številska vrsta je več kot le vsota števno mnogo števil, ampak moramo ta števila sešteti v vnaprej danem vrstnem redu. Tukaj si bomo pogledali, v katerih primerih vsota vrste ni odvisna od vrstnega reda seštevanja in v katerih primerih sam vrstni red odločilno vpliva na rezultat.

Definicija 3.4.4. Naj bo $\sigma:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ bijekcija in $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ vrsta. *Preureditev vrste $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, prirejena bijekciji σ*, je vrsta

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_{\sigma(n)}=a_{\sigma(1)}+a_{\sigma(2)}+a_{\sigma(3)}+\cdots.$$

Izrek 3.4.5. *Naj bo vrsta* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *absolutno konvergentna. Potem za vsako bijekcijo* σ *preureditev vrste* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$*, prirejena* σ*, konvergira absolutno in velja*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Dokaz. Naj bo $\varepsilon > 0$. Ker vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira absolutno, iz Cauchyjevega pogoja sledi, da obstaja tak n_0, da velja

$$\sum_{n}^{m} |a_n| < \varepsilon$$

za vsak $n, m > n_0$. Naj bo l tako veliko naravno število, da velja

$$\{1, 2, 3, \dots, n_0\} \subset \{\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(l)\}.$$

Seveda je $l \geq n_0$. Za nek $n \geq l$ naj bo m tak, da bo veljalo

$$\{1, 2, \dots, n_0\} \subset \{\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n)\} \subset \{1, 2, \dots, m\}.$$

Naj bo sedaj $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ in $S_n' = a_{\sigma(1)} + a_{\sigma(2)} + \ldots + a_{\sigma(n)}$. Potem velja

$$\begin{aligned}
|S_n' - S| &\leq |S_n' - S_{n_0}| + |S_{n_0} - S| \\
&\leq \left| \sum_{k=1}^{n} a_{\sigma(k)} - \sum_{k=1}^{n_0} a_k \right| + \left| \sum_{k=n_0+1}^{\infty} a_k \right| \\
&\leq \sum_{k=n_0+1}^{m} |a_k| + \varepsilon \\
&< 2\varepsilon
\end{aligned}$$

□

Izrek 3.4.6 (Riemannov izrek). *Naj bo* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *pogojno konvergentna vrsta in* $A \in [-\infty, \infty]$ *poljubno število. Potem obstaja taka bijekcija* $\sigma \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$*, da velja*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} = A.$$

Dokaz. Naj bo $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ pogojno konvergentna vrsta in predpostavimo, da je $A > 0$. Med členi $a_1, a_2, a_3, \dots$ je neskončno mnogo tako pozitivnih kot tudi negativnih členov. Naj bodo $b_1, b_2, b_3, \dots$ po vrsti pozitivni členi in $c_1, c_2, c_3, \dots$ negativni členi te vrste. Ker je vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ pogojno konvergentna, sta obe vrsti $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ in $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ divergentni. Preureditev vrste naredimo takole. Seštejemo toliko števil $b_1 + b_2 + \cdots + b_m$ da velja $b_1 + b_2 + \cdots + b_{m-1} \leq A$ in $b_1 + b_2 + \cdots + b_m > A$. Nato prištevamo števila c_i toliko časa, da pridemo pod A, torej $b_1 + b_2 + \cdots + b_m + c_1 + c_2 + \cdots + c_{l-1} \geq A$, $b_1 + b_2 + \cdots + b_m + c_1 + c_2 + \cdots + c_l < A$. Postopek nadaljujemo tako, da zopet po vrsti dodajamo števila b_i dokler ne pridemo nad A in nato prištevamo števila c_i dokler ne pridemo pod A,... Jasno je, da bomo na ta način uporabili vse člene vrste $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ in da bo vsota take vrste ravno A. Primer, ko je $A \leq 0$ je skoraj identičen. Poglejmo si še, kako obravnavamo primer $A = \infty$. V tem primeru najprej seštevamo člene b_i toliko časa, da je vsota večja od 1 in nato prištejemo c_1. Nato zopet prištevamo člene b_i, da je vsota večja od 2 in nato prištejemo c_2,... Na ta način bo vrsta divergirala proti ∞. Podobno naredimo za $A = -\infty$. $\square$

Množenje vrst. V tem kratkem razdelku si bomo pogledali, kako lahko vrste med seboj množimo. Naj bosta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ in $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ dve vrsti. Če želimo ti dve vrsti zmnožiti, moramo sešteti vse možne produkte členov obeh vrst

$$\begin{array}{cccc} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & \cdots \\ a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 & \cdots \\ a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array}.$$

Te člene lahko seštejemo na zelo različne načine. Eden od bolj običajnih načinov je Cauchyjev produkt, ki je definiran kot

$$(\sum_{n=1}^{\infty} a_n) \cdot (\sum_{n=1}^{\infty} b_n) = \sum c_n$$

kjer je

$$c_n = \sum_{k=1}^{n} a_k b_{n-k+1}.$$

Navedli bomo dva izreka, vendar brez dokazov.

Izrek 3.4.7. *Naj velja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A$ in $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = B$, pri čemer vsaj ena od vrst konvergira absolutno. Potem Cauchyjev produkt vrst $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ in $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergira in ima vsoto AB.*

Izrek 3.4.8. *Naj velja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A$ in $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = B$, pri čemer obe vrsti konvergirata absolutno. Potem za vsak vrstni red seštevanja produkt vrst $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ in $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergira absolutno in ima vsoto AB.*

POGLAVJE 4

Realne funkcije ene realne spremenljivke

4.1. Osnovne definicije in lastnosti

Realna funkcija ene realne spremenljivke je preslikava $f : D \to \mathbb{R}$, kjer je $D \subset \mathbb{R}$. Funkcija torej vsakemu elementu $x \in D$, x imenujemo *neodvisna spremenljivka*, priredi točno določen element $f(x) \in \mathbb{R}$. Množico D imenujemo *definicijsko območje* funkcije f, množico $\{f(x), x \in D\}$ pa *zaloga vrednosti* funkcije. Le to pogosto označimo z R_f. Naj bo $A \subset D$, množico $f(A) = \{f(x); x \in A\}$ imenujemo *slika množice* A. Za $B \subset \mathbb{R}$ imenujemo $f^{-1}(B) = \{x \in D; f(x) \in B\}$ *praslika množice* B. Zaloga vrednosti je torej ravno $f(D)$. Dve funkcije $f : D_f \to \mathbb{R}$ in $g : D_g \to \mathbb{R}$ sta enaki, če velja $D_f = D_g$ in $f(x) = g(x)$ za vsak $x \in D_f = D_g$. V kolikor je funkcija podana samo s predpisom, npr. $f(x) = \sqrt{x}$, za domeno običajno vzamemo največjo podmnožico $D \subset \mathbb{R}$, na kateri je ta predpis smisel. V tem konkretnem primeru je $D = \{x, x \geq 0\}$.

Primer 4.1.1. Poiščimo definicijsko območje in zalogo funkcij. Ali sta funkciji enaki?

(i) $f(x) = 2\ln x$. $D_f = \{x, x > 0\}$, $R_f = \mathbb{R}$.

(ii) $f(x) = \ln x^2$. $D_f = \mathbb{R}$, $R_f = \mathbb{R}$.

Čeprav velja formula $\ln x^2 = 2\ln x$, zgornji dve funkciji nista povsem enaki, saj ta formula velja le za pozitivne x. Funkciji torej nimata enakega definicijskega območja. Rečemo lahko, da je funkcija $\ln x^2$ *razširitev* funkcije $2\ln x$.

Definicija 4.1.2. *Graf funkcije* $f : D \to \mathbb{R}$ je podmnožica $\Gamma \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ parov $(x, f(x))$, torej

$$\Gamma_f = \{(x, f(x); x \in D\}.$$

Definicija 4.1.3. Funkcija $f : D \to \mathbb{R}$ je *naraščajoča (strogo naraščajoča)*, če iz $x < y$ sledi $f(x) \leq f(y)$ $(f(x) < f(y))$ in *padajoča (strogo padajoča)*, če iz $x < y$ sledi $f(x) \geq f(y)$ $(f(x) > f(y))$. Če je funkcija bodisi (stogo) naraščajoča ali (strogo) padajoča, rečemo, da je (strogo) monotona.

Definicija 4.1.4. Funkcija $f: D \to \mathbb{R}$ je injektivna, če velja $f(x) \neq f(y)$, če $x \neq y$.

Primer 4.1.5. Funkcija $f(x) = x^3$ je injektivna, saj je $x^3 = y^3$ natanko tedaj, ko je $x = y$. Funkcija $f(x) = x^2$ pa ni injektivna, saj je npr. $f(-1) = f(1)$.

Definicija 4.1.6. Funkcija $f : D \to \mathbb{R}$ je *navzgor omejena*, če obstaja tak M, da velja $f(x) \leq M$ za vsak $x \in D$, in je *navzdol omejena*, če obstaja tak m, da je $f(x) \geq m$ za vsak $x \in D$.

4.2. Osnovne operacije s funkcijami

Definicija 4.2.1. Naj bosta $f : D \to R$ in $g : D \to \mathbb{R}$ funkciji, definirani na D. Potem lahko definiramo funkcije $f + g\colon D \to \mathbb{R}$, $f - g\colon D \to \mathbb{R}$, $fg\colon D \to \mathbb{R}$, in če velja $g(x) \neq 0$ za vsak $x \in D$, tudi $\frac{f}{g}\colon D \to \mathbb{R}$:

- $(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$
- $(fg)(x) = f(x)g(x)$
- $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$.

Definirajmo sedaj še operacijo *kompozitum*.

Definicija 4.2.2. Naj bosta $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ in $g\colon D_g \to \mathbb{R}$, pri čemer velja $R_f \subset D_g$. Potem lahko definiramo *kompozitum funkcij g in f*, $g \circ f\colon D_f \to \mathbb{R}$, kot

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Primer 4.2.3. Naj bosta $f(x) = \sqrt{x}$ in $g(x) = \ln x$. Napišimo kompozituma $f \circ g$ ter $g \circ f$ in določimo njuna definicijska območja. Poglejmo si najprej $f \circ g$.

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\ln x) = \sqrt{\ln x}.$$

Ker je funkcija f definirana le za pozitivne vrednosti, je funkcija $f \circ g$ definirana le pri takih $x > 0$, za katere je $\ln x \geq 0$. Torej je $D_{f\circ g} = \{x \in \mathbb{R}; x \geq 1\}$. Za $g \circ f$ velja

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x}) = \ln\sqrt{x} = \frac{1}{2}\ln x.$$

Funkcija $g \circ f$ je definirana za vse strogo pozitivne x. Opazimo lahko, da operacija kompozitum ni komutativna, torej $f \circ g \neq g \circ f$.

Naj bo sedaj funkcija $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ injektivna. Za vsak $y \in R_f$ torej obstaja natanko en $x \in R_f$, da velja $f(y) = x$. Tako lahko definiramo funkcijo $f^{-1}\colon R_f \to \mathbb{R}$ s predpisom

$$f^{-1}(x) = y, \text{ če je } f(y) = x.$$

Funkcijo f^{-1} imenujemo *inverz funkcije f*.

Primer 4.2.4. Poiščimo inverz funkcije

$$f(x) = \frac{2x+3}{3x-1}.$$

V kolikor $y \neq \frac{1}{3}$, velja

$$x = \frac{2y+3}{3y-1} \Leftrightarrow (3y-1)x = 2y+3 \Leftrightarrow y(3x-2) = x+3 \Leftrightarrow y = \frac{x+3}{3x-2}.$$

Zadnja ekvivalenca velja, če $x \neq \frac{2}{3}$. Torej je

$$f^{-1}(x) = \frac{x+3}{3x-2},\ f^{-1}\colon \mathbb{R}\backslash\{\frac{2}{3}\} \to \mathbb{R}.$$

4.3. Limita funkcije

Primer 4.3.1. Poglejmo si funkcijo

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}.$$

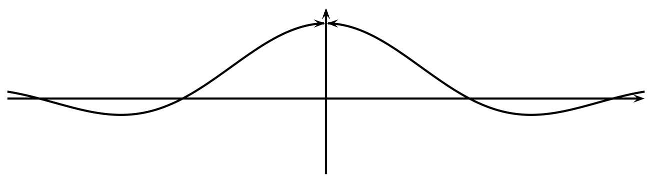
Funkcija f je definirana povsod, razen v točki 0. Tabelirajmo njene vrednosti pri majhnih x.

x	$f(x)$
± 1	0.841471
± 0.1	0.998334
± 0.01	0.999983
± 0.0001	0.999999

Zdi se, da bližje, ko je x vrednosti 0, bolj je $f(x)$ blizu 1. S simbolom to opažanje zapišemo kot

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Seveda bomo to dejstvo kasneje tudi strogo dokazali.



Slika 4.1. Graf funkcije $\frac{\sin x}{x}$

Definicija 4.3.2. Naj bo f definirana v neki okolici točke a, razen morda v točki a. Število A je *limita funkcije f v točki a*, pišemo

$$A = \lim_{x\to a} f(x),$$

če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja $\delta > 0$, da je $|f(x) - A| < \varepsilon$, če je le $|x - a| < \delta$, $x \neq a$.

Opomba. Pomembno je vedeti, da limita funkcije f v točki a ni prav nič odvisna od morebitne vrednosti funkcije f v točki a, v kolikor je f v a sploh definirana. Vrednost limite je odvisna le od tega, kolikšne so vrednosti v točkah blizu a.

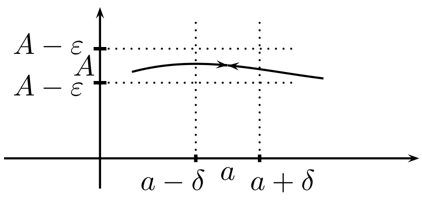
Primer 4.3.3. Definirajmo

$$f(x) = \begin{cases} x & , x \neq 1 \\ 3 & , x = 1 \end{cases}$$

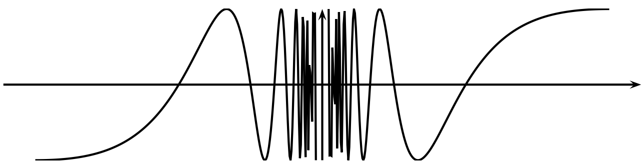
Velja

$$\lim_{x\to 1} f(x) = 1 \neq 3 = f(1).$$

Primer 4.3.4. Definirajmo $f(x) = \sin \frac{\pi}{x}$. Ko se x približuje vrednosti 0, funkcija $f(x)$ ves čas oscilira med vrednostma -1 in 1. Zato limita $\lim_{x\to 0} \sin \frac{1}{x}$ ne obstaja.



SLIKA 4.2. $\lim_{x\to a} f(x) = A$



SLIKA 4.3. Graf funkcije $\sin \frac{1}{x}$

S pomočjo naslednjega izreka lahko karakteriziramo limito funkcije s pomočjo limite zaporedij. Tako bomo lahko nekatere izreke in trditve dokazovali s pomočjo orodij, ki smo jih razvili pri zaporedjih.

IZREK 4.3.5. *Naj bo funkcija f definirana v okolici U točke a, razen morda v a. $A = \lim_{x\to a} f(x)$ natanko tedaj, ko za vsako zaporedje $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset U\backslash\{a\}$, $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, velja $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$*

DOKAZ. Naj bo najprej $\lim_{x\to a} f(x) = A$ in naj bo $\varepsilon > 0$. Naj bo δ tak, da velja $|f(x) - A| < \varepsilon$, če je le $|x - a| < \delta$, $x \neq a$. Vzemimo poljubno zaporedje $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ z limito a. Za to zaporedje obstaja tak n_0, da za vsak $n \geq n_0$ velja $|x_n - a| < \delta$. Zato bo za $n \geq n_0$ veljalo tudi $|f(x_n) - A| < \varepsilon$. Pokazali smo torej, da velja $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$.
Dokažimo še obrat. Predpostavimo sedaj, da velja $\lim_{x\to a} f(x) \neq A$. Torej obstaja tak $\varepsilon > 0$, da bo za vsak $\delta > 0$ obstajal $x \neq a$, $|x - a| < \delta$ in hkrati $|f(x) - A| \geq \varepsilon$. Naj bo najprej $\delta = 1$ in $x_1 \neq a$ tak, da $|x_1 - a| < 1$ in hkrati $|f(x_1) - A| \geq \varepsilon$. Vzemimo sedaj $\delta = \frac{1}{2}$ in $x_2 \neq a$, da $|x_2 - a| < 1/2$ in $|f(x_2) - A| \geq \varepsilon$. Postopek nadaljujemo z $\delta = 1/3$,... Tako dobimo zaporedje x_n, ki konvergira proti a, zaporedje $f(x_n)$ pa ne konvergira proti A. S tem smo izrek dokazali. □

4.4. Pravila za računanje limit

IZREK 4.4.1. *Naj bosta f in g funkciji, definirani v okolici točke a, razen morda v a. Naj obstajata limiti $\lim_{x\to a} f(x) = A$ in $\lim_{x\to a} g(x) = B$. Potem obstajajo limite $\lim_{x\to a}(f + g)(x)$, $\lim_{x\to a}(f - g)(x)$ ter $\lim_{x\to a}(fg)(x)$, in če $g(x) \neq 0$ v okolici a in $B \neq 0$, tudi $\lim_{x\to a}(f/g)(x)$. Velja*

(i) $\lim_{x\to a}(f \pm g)(x) = A \pm B$,
(ii) $\lim_{x\to a}(fg)(x) = AB$,

(iii) $\lim_{x\to a}(f/g)(x) = A/B$.

Dokaz. Ker veljajo analogne izjave za zaporedja, dobimo dokaz s pomočjo uporabe izreka 4.3.5. □

Primer 4.4.2. Z zaporedno uporabo točke (ii) zgornjega izreka dobimo

$$\lim_{x\to a} x^n = a^n.$$

Bolj splošno z uporabo prvih dveh točk zgornjega izreka dobimo

$$\lim_{x\to a} p(x) = p(a)$$

za vsak polinom $p(x)$, in če je $\frac{p(x)}{q(x)}$ poljubna racionalna funkcija z $q(a) \neq 0$, dobimo

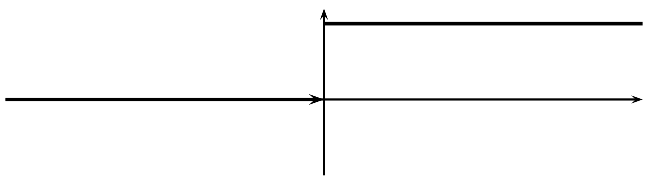
$$\lim_{x\to a} \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(a)}{q(a)}.$$

Pri tem smo uporabili še zadnjo točko zgornjega izreka.

4.5. Desna, leva limita, limita v $\pm\infty$ ter neskončno kot limita

Poglejmo si funkcijo $H\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definirano z

$$H(x) = \begin{cases} 0 & ; x < 0 \\ 1 & ; x \geq 0 \end{cases}.$$



Slika 4.4. Graf Heavisidove funkcije

Zgornja funkcija se imenuje Heavisidova funkcija, in predstavlja električni tok, če v času $x = 0$ prižgemo stikalo. Takoj vidimo, da ne obstaja limita $\lim_{x\to 0} H(x)$. Se pa vrednosti lepo približujejo vrednosti 1, ko gre x priti 0 z desne, in vrednosti 0, ko se x približuje 0 z leve. To zapišemo kot

$$\lim_{x\to 0^-} H(x) = 0, \qquad \lim_{x\to 0^+} H(x) = 1.$$

Definicija 4.5.1. Naj bo f definirana na $(a-r, r)$ za nek $r > 0$. Število A je *leva limita funkcije f v točki a*, pišemo

$$A = \lim_{x\to a^-} f(x),$$

če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja $\delta > 0$, da je $|f(x) - A| < \varepsilon$, če je le $|x - a| < \delta$, $x < a$.

Definicija 4.5.2. Naj bo f definirana na $(a, a+r)$ za nek $r > 0$. Število A je *desna limita funkcije f v točki a*, pišemo

$$A = \lim_{x \to a^+} f(x),$$

če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja $\delta > 0$, da je $|f(x) - A| < \varepsilon$, če je le $|x - a| < \delta$, $x > a$.

Seveda velja trditev

Izrek 4.5.3. *Funkcija f ima v a limito natanko tedaj, ko ima v a desno in levo limito in sta enaki.*

Opomba. Podobna pravila, kot smo jih zapisali za limite, veljajo tudi za računanje levih in desnih limit.

S pomočjo pojma limita v neskončnosti pogledamo, proti kateri vrednosti se približuje funkcija, ko gre x čez vse meje.

Definicija 4.5.4. Naj bo f definirana na (b, ∞) za nek b. Število A je *limita funkcije f v neskončnosti*, pišemo

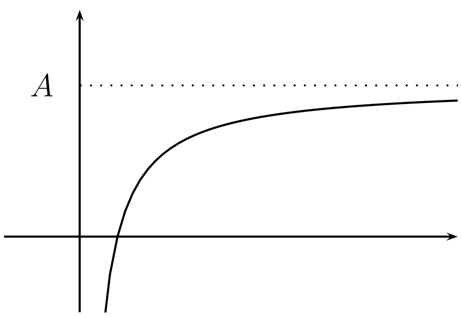
$$A = \lim_{x \to \infty} f(x),$$

če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja M, da je $|f(x) - A| < \varepsilon$, če je le $x > M$.

Definicija 4.5.5. Naj bo f definirana na $(-\infty, b)$ za nek b. Število A je *limita funkcije f v minus neskončnosti*, pišemo

$$A = \lim_{x \to -\infty} f(x),$$

če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja $m > 0$, da je $|f(x) - A| < \varepsilon$, če je le $x < m$.



Slika 4.5. $\lim_{x \to \infty} f(x) = A$

Opomba. Podobna pravila, kot smo jih zapisali za limite, veljajo tudi za računanje limit v $\pm\infty$.

Primer 4.5.6. Izračunaj limito

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2x^3 - x^2 + 4x - 1}{x^3 + 2x^2 - 3}.$$

Tako imenovalec kot števec delimo z x^3 in dobimo

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3-x^2+4x-1}{x^3+2x^2-3}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-1/x+4/x^2-1/x^3}{1+2/x-3/x^3}=\frac{2}{3}.$$

Bolj splošno lahko opazimo, da velja

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0}{b_nx^n+b_{n-1}x^{n-1}+\cdots+b_0}=\frac{a_n}{b_n},$$

za vsaka dva polinoma enakih stopenj. V kolikor je polinom v imenovalcu višje stopnje, kot v števcu, pa je rezultat enak 0.

Primer 4.5.7. Izračunajmo limito

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x.$$

Naj bo za vsak dovolj velik x naravno število n tako, da velja $n\le x<n+1$. Potem je

$$(1+\frac{1}{n+1})^n<(1+\frac{1}{x})^x<(1+\frac{1}{n})^{n+1}.$$

Velja

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n+1})^n=\frac{\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n+1})^{n+1}}{\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n+1})}=e$$

in podobno

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^{n+1}=\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})=e.$$

Zato je

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e.$$

Podobno bi lahko izračunali tudi

$$\lim_{x\to-\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e.$$

Poglejmo si še, kaj pomeni, da je limita funkcije $\pm\infty$.

Definicija 4.5.8. Naj bo funkcija f definirana v okolici točke a, razen morda v a. Neskončno je limita funkcije f v točki a, pišemo

$$\lim_{x\to a}f(x)=\infty,$$

če za vsak M obstaja $\delta>0$, tako da je $f(x)>M$ če je le $|x-a|<\delta$, $x\neq a$.

Opomba. Podobno definiramo pojem $\lim_{x\to a}f(x)=-\infty$ in, z malo spremembami v definiciji, lahko $\pm\infty$ definiramo kot levo limito, desno limito ter limito v $\pm\infty$.

Primer 4.5.9. Naj bosta $p(x)$ in $q(x)$ polinoma, pri čemer je stopnja polinoma p strogo večja od stopnja polinoma q. Potem velja

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{p(x)}{q(x)}=\pm\infty,$$

pri čemer je predznak odvisen od predznakov vodilnih koeficientov polinomov. Na primer

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3 - x^2 + x}{-x^2 + x + 7} = -\infty.$$

4.6. Definicija zveznosti

Zveznost je eden od osnovnih pojmov matematične analize. S pojmom zveznost želimo formalizirati princip, ko majhne spremembe vhodnih podatkov pri funkciji povzročijo le majhne spremembe v rezultatu. To je lastnost, ki jo pričakujemo od večine funkcij, ki na nek način modelirajo realne pojave v naravi.

DEFINICIJA 4.6.1. Funkcija $f : D \to \mathbb{R}$ je *zvezna v točki* $a \in D$, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja $\delta > 0$, tako da je $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$, če je le $|x - a| < \delta$.

DEFINICIJA 4.6.2. Funkcija $f : D \to \mathbb{R}$ je *zvezna na množici* D, če je zvezna v vsaki točki množice D.

OPOMBA. Pogosto rečemo preprosto, da je funkcija f zvezna in ne omenjamo same množice D. V tem primeru razumemo, da je zvezna na svojem definicijskem območju.

IZREK 4.6.3. *Naj bo funkcija $f : I \to \mathbb{R}$ realna funkcija, definirana na intervalu I in $a \in I$ poljubna točka tega intervala. Potem je f zvezna v a natanko tedaj, ko velja*

$$f(a) = \lim_{x\to a} f(x).$$

V primeru, ko je a robna točka intervala I, moramo zgornjo limito zamenjati z bodisi levo ali desno limito.

DOKAZ. Dokaz sledi direktno iz definicije limite funkcije. □

Če kombiniramo izrek 4.3.5 z zgornjo trditvijo, dobimo

IZREK 4.6.4. *Funkcija $f : D \to \mathbb{R}$ je zvezna v $a \in D$ natanko tedaj, ko za vsako zaporedje $\{a_n\}_{n=1}^\infty \subset D$, ki konvergira proti a, velja*

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(a).$$

OPOMBA. V kolikor malo preformuliramo zgornji izrek, dobimo naslednje. Naj bo $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ konvergentno zaporedje z limito a in f zvezna funkcija, katere definicijsko območje vsebuje točko a. Potem velja

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f\left(\lim_{n\to\infty} a_n\right).$$

Poglejmo si to na primeru. Zaenkrat predpostavimo, da je $\ln x$ zvezna funkcija (to bomo v kratkem dokazali). Izračunajmo limito

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln}{n}.$$

Velja

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}=\lim_{n\to\infty}\ln\sqrt[n]{n}=\ln\left(\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}\right)=\ln 1=0.$$

4.7. Primeri in osnovne lastnosti zveznih funkcij

IZREK 4.7.1. *Naj bosta f, g definirani na D in zvezni v $a \in D$. Potem so v a zvezne funkcije $f+g$, $f-g$, fg, in če $g(a)\neq 0$ tudi f/g.*

DOKAZ. Dokaz tega izreka direktno sledi iz trditve 4.6.3 in 4.4.1. □

PRIMER 4.7.2. Naj bosta $p(x)$ in $q(x)$ in $a\in\mathbb{R}$ tak, da $q(a)\neq 0$. Pri razdelku o limitah smo pokazali, da velja

$$\lim_{x\to a}\frac{p(x)}{q(x)}=\frac{p(a)}{q(a)}.$$

Zato je poljubna racionalna funkcija

$$r(x)=\frac{p(x)}{q(x)}$$

zvezna povsod, kjer je definirana. Posebej so povsod zvezne potenčne funkcije $f(x)=x^n$ in polinomi. Malo kasneje bomo videli, da so zvezne tudi potenčne funkcije $f(x)=x^a$ s poljubnimi realnimi eksponenti.

PRIMER 4.7.3. Pokažimo, da je funkcija

$$f(x)=e^x$$

zvezna povsod. Naj bo h poljubno (majhno) število. Velja $e^{a+h}=e^ae^h$ Če bomo dokazali, da je funkcija e^x zvezna v točki 0, bo veljalo

$$\lim_{x\to a}e^x=\lim_{h\to 0}e^{a+h}=\lim_{h\to 0}e^ae^h=e^a\lim_{h\to 0}e^h=e^a$$

in bo zato funkcija e^x zvezna v a. Pokazati moramo torej le, da je e^x zvezna v 0. Naj bo h majhen in predpostavimo najprej, da je $h>0$. Naj bo n tak, da je $h\leq 1/n$. Velja

$$1<e^h\leq e^{1/n}=\sqrt[n]{e}.$$

Ker velja

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{e}=1$$

je

$$\lim_{h\to 0}e^h=1.$$

Podobno bi gledali, če je $h<0$. Zato je e^x zvezna v 0 in posledično povsod.

PRIMER 4.7.4. Poglejmo, da je funkcija

$$f(x)=\sin x$$

zvezna. Velja

$$\sin(x+h)=\sin x\cos h+\cos x\sin h.$$

Ker je $\sin h$ dolžina nasprotne katete pravokotnega trikotnika s kotom h in hipotenuzo 1, je

$$\lim_{h\to 0}\sin h = 0$$

in ker je $\cos h$ dolžina priležne katete pravokotnega trikotnika s kotom h in hipotenuzo 1, je

$$\lim_{h\to 0}\cos h = 1.$$

Zato je $\lim_{h\to 0}\sin(x+h) = \sin x$ in je f zvezna. Ta dokaz ni povsem eksakten, saj temelji na geometrijsi predstavi funkcij $\sin x$ in $\cos x$.

Izrek 4.7.5. *Naj bosta $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ in $g\colon D_g \to \mathbb{R}$ in $f(D_f) \subset D_g$. Naj bo f zvezna v točki $a \in D_f$ in g zvezna v $f(a)$. Potem je funkcija $g\circ f$ zvezna v točki a.*

Dokaz. Naj bo $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D_f$ poljubni zaporedje z limito a. Ker je f zvezna v a velja

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f\left(\lim_{n\to\infty} a_n\right) = f(a)$$

in zato zaporedje $\{f(a_n)\}$ konvergentno z limito $f(a)$. Ker je sedaj g zvezna v $f(a)$ velja

$$\lim_{n\to\infty} g\circ f(a_n) = \lim_{n\to\infty} g(f(a_n)) = g\left(\lim_{n\to\infty} f(a_n)\right) = g(f(a)).$$

Tako smo dokazali, da je $g\circ f$ zvezna v a. □

Primer 4.7.6. Funkcija

$$f(x) = a^x$$

je zvezna za vsak a, saj velja

$$a^x = e^{x\ln a}$$

in je zato f kompozitum zveznih funkcij e^x in $x\ln a$.

Primer 4.7.7. Funkciji $\cos x$ in $\tan x$ sta zvezni, saj velja

$$\cos x = \sin(\pi/2 - x)$$

in

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Izrek 4.7.8. *Naj bo $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ zvezna in injektivna. Potem je f^{-1} zvezna na $f([a,b])$.*

Dokaz. Naj bo $d \in f([a,b])$ in $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$ poljubno zaporedje v $f([a,b])$, ki konvergira proti d. Naj bodo $c = f^{-1}(d)$ in $c_n = f^{-1}(d_n)$ Naj bo c' poljubno stekališče zaporedja $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$. Naj bo c' limita podzaporedja $\{d_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$. Ker je f zvezna v c' je

$$f(c') = \lim_{k\to\infty} f(c_{n_k}) = \lim_{k\to\infty} d_{n_k} = d.$$

Torej je $f(c') = d$ in ker je f injektivna, je $c' = c$. Pokazali smo, da je edino stekališče zaporedja $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ točka c. Ker je zaporedje omejeno, je c njegova limita. Torej je

$$\lim_{n\to\infty} f^{-1}(d_n) = f^{-1}(d)$$

in je f^{-1} zvezna v d. □

Primer 4.7.9. Ker je funkcije e^x zvezna, je po prejšnjem izreku inverzna funkcija

$$f(x) = \ln x, \quad f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$$

tudi zvezna.

Primer 4.7.10. Naj bo $a \in \mathbb{R}$ in $f(x) = x^a$, $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$. Ker velja $x^a = e^{a \ln x}$ je zato

$$f(x) = x^a$$

zvezna.

Primer 4.7.11. Inverzne trigonometrijske funkcije

- $\arcsin x$, $\arcsin\colon [-\pi/2, \pi/2] \to \mathbb{R}$
- $\arccos x$, $\arccos\colon [0,\pi] \to \mathbb{R}$
- $\arctan x$, $\arctan\colon (-\infty,\infty) \to \mathbb{R}$

so zvezne, saj so inverzne funkcije zveznih funkcij.

Z zgornjimi primeri smo pokazali, da so vse *elementarne funkcije* zvezne na svojih definicijskih območjih.

4.8. Enakomerna zveznost funkcij

Definicija 4.8.1. Funkcija $f\colon D \to R$ je *enakomerno zvezna na D*, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja $\delta > 0$, da je $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ za vsaka $x, y \in D$ za katera velja $|x - y| < \delta$.

Opomba. Pri običajni zveznosti za vsak x in ε obstaja δ, da je $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$ če je le $|y - x| < \delta$. Ta δ je lahko odvisen od x. Pri enakomerni zveznosti pa želimo, da obstaja δ, ki bo dober za vse x.

Primer 4.8.2. Pokažimo, da funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ ni enakomerno zvezna na $\mathbb{R}$. Naj bo $\varepsilon = 1$ (vseeno, kaj izberemo). Naj bo δ poljubno pozitivno število. Za poljuben x naj bo $y = x + \delta/2$. Potem je

$$|f(y) - f(x)| = (x + \delta/2)^2 - x^2 = \delta(x + \delta/4) > \delta x.$$

Zato je

$$|f(y) - f(x)| > \varepsilon = 1$$

če je $x > \frac{1}{\delta}$. Torej noben δ ni bo dober za naš ε. Intuitivno je razlog v tem, da funkcija postaja vedno bolj strma, ko gre x proti neskončnosti.

Pokažimo, da je vsaka zvezna funkcija na končnem zaprtem intervalu tudi enakomerno zvezna.

Izrek 4.8.3. *Naj bo $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ zvezna. Potem je f enakomerno zvezna.*

Dokaz. Predpostavimo, da f ni enakomerno zvezna. Potem obstaja tak $\varepsilon > 0$, da za vsak $\delta > 0$ obstajata x, y, $|x-y| < \delta$ in hkrati $|f(x) - f(y)| \geq \varepsilon$. Vzemimo tak ε in naj bo $\delta = 1/n$. Tako dobimo par x_n, y_n, da velja $|x_n - y_n| < 1/n$ in $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$. Tak par lahko izberemo za vsak n in tako dobimo zaporedji $\{x_n\}, \{y_n\} \subset [a,b]$. Zaporedje $\{x_n\}$ ima na $[a,b]$ vsaj eno stekališče in zato konvergentno podzaporedje $\{x_{n_i}\}$. Zaporedje $\{y_{n_i}\}$ ima prav tako konvergentno podzaporedje $\{y_{n_{i_j}}\}$. Velja

$$|y_{n_{i_j}} - x_{n_{i_j}}| < \frac{1}{n_{i_j}}, \quad |f(y_{n_{i_j}}) - f(x_{n_{i_j}})| \geq \varepsilon.$$

Torej imata zaporedji $\{y_{n_{i_j}}\}$ in $\{x_{n_{i_j}}\}$ isto limito c, in ker je f zvezna, velja

$$\lim_{j\to\infty} f(y_{n_{i_j}}) = f(c) = \lim_{j\to\infty} f(x_{n_{i_j}}).$$

Prišli smo v protislovje. Zato mora biti f enakomerno zvezna. $\square$

Definicija 4.8.4. Funkcija $f\colon D \to \mathbb{R}$ je *Lipshitzova na D*, če obstaja taka konstanta $C > 0$, da velja

$$|f(x) - f(y)| < C|x-y|$$

za vsaka $x, y \in D$.

Izrek 4.8.5. *Če je $f\colon D \to \mathbb{R}$ Lipshitzova, je na D enakomerno zvezna.*

Dokaz. Za ε lahko izberemo $\delta = \frac{\varepsilon}{C}$. $\square$

4.9. Lastnosti zveznih funkcij

Izrek 4.9.1. *Naj bo $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ zvezna in $f(a)\cdot f(b) < 0$. Potem obstaja $\xi \in (a,b)$, da je $f(c) = 0$.*

Dokaz. Predpostavimo, da je $f(a) < 0$ in $f(b) > 0$. Označimo z $a_1 = a$ in $b_1 = b$. Poglejmo si vrednost $f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right)$. Če je ta vrednost enaka 0, smo našli ničlo funkcije f in lahko zaključimo. Če je vrednost negativna, označimo $a_2 = \frac{a_1+b_1}{2}$ in $b_2 = b_1$. Če je pozitivna, definiramo $a_2 = a_1$ in $b_2 = \frac{a_1+b_1}{2}$. V naslednjem koraku si pogledamo vrednost $f\left(\frac{a_2+b_2}{2}\right)$. Če je vrednost 0, lahko končamo. Če je vrednost negativna, definiramo $a_3 = \frac{a_2+b_2}{2}$, $b_3 = b_2$. Če je pozitivna, definiramo $a_3 = a_2$, $b_3 = \frac{a_2+b_2}{2}$. Postopek induktivno nadaljujemo. Imamo dve možnosti. Ali smo našli ničlo v enem od korakov, ali pa smo skonstruirali zaporedji $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ in $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$. Iz konstrukcije sledi

- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je naraščajoče in $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ padajoče,
- za poljubna indeksa n, m velja $a_n < b_m$,
- $f(a_n) < 0$ in $f(b_n) > 0$,

- $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^{n-1}}$.

Iz prve lastnosti in omejenost sledi, da imata obe zaporedji limito. Velja

$$\lim_{n\to\infty} b_n - \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (b_n - a_n) = 0.$$

Označimo torej

$$\xi = \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} a_n.$$

Iz tretje lastnosti zgoraj in zveznosti f dobimo

$$0 \geq \lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(\xi) = \lim_{n\to\infty} b_n \geq 0.$$

To je možno le, če je $f(\xi) = 0$. □

Opomba. Postopek, ki smo ga uporabili v zgornjem izreku, imenujemo *bisekcija* in je najbolj enostavna metoda iskanja ničel funkcij.

Izrek 4.9.2. *Naj bo $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ zvezna. Potem je f omejena.*

Dokaz. Predpostavimo, da f ni omejena. Za vsak $n \in \mathbb{N}$ torej obstaja tak $a_n \in [a,b]$, da velja $|f(a_n)| > n$. Zaporeje $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je omejeno, in ima zato na $[a,b]$ konvergentno podzaporedje $\{a_{n_i}\}$. Označimo limito tega podzaporedja s c. Ker je f zvezna, velja

$$f(c) = \lim_{i\to\infty} f(a_{n_i}),$$

kar pa ni mogoče, saj velja $|a_{n_i}| > n_i$ in je zato zaporedje $\{f(a_{n_i})\}$ divergentno. Protislovje izhaja iz predpostavke, da je f neomejena. □

Opomba. Pomembno pri tem izreku je, da je interval $[a,b]$ zaprt in končen. Zvezne funkcije so lahko neomejene na neskončnih, polodprtih in odprtih intervalih.

Izrek 4.9.3. *Naj bo $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ zvezna. Potem ima f na $[a,b]$ tako maksimalno kot tudi minimalno vrednost.*

Dokaz. Funkcija f je zvezna in zato po izreku 4.9.2 omejena na $[a,b]$. Označimo z M supremum množice $\{f(x), x \in [a,b]\}$. Pokažimo, da je M maksimum. Recimo, da ni, kar pomeni, da M ni v sliki funkcije f. Torej je funkcija

$$g(x) = \frac{1}{M - f(x)}$$

dobro definirana in zvezna na vsem $[a,b]$. Zato je na $[a,b]$ omejena. Naj bo torej M' tak, da velja

$$g(x) \leq M',$$

oziroma

$$M - \frac{1}{M'} \geq f(x).$$

To pa ni mogoče, saj je M supremum. Prišli smo v protislovje, ki izhaja iz predpostavke, da M ni maksimum. Podobno dokažemo, da ima f minimum. □

IZREK 4.9.4. *Naj bo* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *zvezna in naj bo* $m = \min f$ *in* $M = \max f$. *Naj bo* $c \in [m, M]$. *Obstaja tak* $\xi \in [a, b]$, *da je* $f(\xi) = c$. *Povedano drugače,* $R_f = [m, M]$.

DOKAZ. Naj bosta a', b' taka, da velja $f(a') = m$ in $f(b') = M$. Definirajmo $g(x) = f(x) - c$. Funkcija g je zvezna in velja $g(a') \leq 0$ ter $g(b') \geq 0$. Zato ima g med a' in b' vsak eno ničlo ξ, kar pomeni $f(\xi) = c$. $\square$